UNIVERSIDAD COOPERATIVA DE COLOMBIA

FACULTAD DE INGENIERIA SECCIONAL BOGOTA
AREA: DE CIENCIAS BASICAS
CÁLCULO INTEGRAL

GUIA No 1 INTEGRAL INDEFINIDA

COMPETENCIA:
Identificar correctamente la relación entre la integración y la derivación

ELEMENTO DE LA COMPETENCIA
Mostrar la relación inversa entre integración y derivación.   Manejar métodos de solución de integrales básicas

Se considera que la integración es un procedimiento inverso a la derivación y es un método para determinar el área bajo una curva.

ANTIDERIVADAS

Una situación que se presenta en el cálculo es hallar la función de la cual se conoce su derivada. Este proceso es exactamente, la operación inversa de la derivación que llamamos antiderivación o integración o cálculo de primitivas. Si una función es derivable y luego se integra la función obtenida, el resultado es la función original.

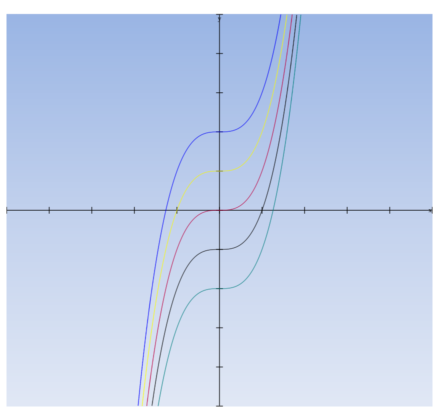
El símbolo utilizado para la antiderivada de f es $\int f(x)dx$, que se lee "integral de f respecto a x". La expresión $\int f(x)dx$, es llamada la integral indefinida de la función f.

Ejemplo 1:
Sea $f(x) = 3x^2$ de acuerdo con nuestra experiencia obtenida en derivación, podemos decir que una antiderivada de $f(x) = 3x^2$ es $F(x) = x^3$ Pero observamos que existen otras antiderivadas de $f(x) = 3x^2$, como:

$f(x) = x^3 + 5$, $f(x) = x^3 - 7$, $f(x) = x^3 + \frac{4}{5}$

Todas estas funciones tienen por derivada a 3x y difieren únicamente en una constante, por lo cual podemos afirmar que $F(x) = x^3 + c$, donde c E **R,** define una familia completa de antiderivadas de $f(x)$. En símbolos $\int 3xdx = x^3 + c$

OBSERVACIÓN: Integrar es encontrar una función que al derivar, de el integrando.



La familia de curvas tiene la siguiente propiedad: "dado un punto arbitrario del plano (x_1,y_1) existe una única curva de la familia, que pasa por dicho punto".

Esto significa que la constante de integración queda determinada cuando se especifica un punto por el cual pase la curva.

Ejemplo 2:
Hallar la antiderivada de $f(x) = 3x^2$ que pase por el punto p(2,18).
La integral $f(x) = 3x^2$, $es\ x^3 + c$, ya que $d(x^3 + c)/\,dx = 3x^2$ que es la función que se está integrando. Geométricamente, esta integral representa en el plano cartesiano una familia de curvas, cada una de las cuales corresponde a un valor diferente de la constante c.

La curva que deseamos es la que pasa por el punto (2,18), entonces reemplazamos en $y = x^3 + C$ los valores del punto para obtener el valor especifico de c; con x = 2, y = 18

$$y = x^3+c$$
$$18 = 2^3+c$$
$$18 = 8 + c$$
$$18-8 = c$$
$$\underline{\mathbf{10 = c}}$$

Recordemos algunas propiedades elementales de potenciación y radicación.

1. $a^m * a^n = a^{n+m}$
2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = \frac{1}{a^{m-n}}$
3. $(a^n)^m = a^{n*m}$
4. $a^{-n} = {}^1/_{a^n}$
5. $a^0 = 1$
6. $a^1 = a$
7. $(a/b)^n = \mathrm{a}^{\mathrm{n}}/b^n$
8. $(a.b)n^{\,n} = a^n.b^n$
9. $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$
10. $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$

OBSERVACIÓN: $\int f(x)\,dx = f(x) + c \; si \; y \; solo \; si \; f'(x) = f(x)$

f(x) $\xrightarrow{\text{Derivación}}$ / $\xleftarrow[\text{Integración}]{}$ f(x)

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL INDEFINIDA.

1. La derivación es la inversa de la integración.
2. La integración es la inversa de la derivación.
3. Toda función continua tiene una integral indefinida.
4. La integral de una constante por una función es igual a la constante por la integral de la función.
5. La integral de una suma algebraica de varias funciones es igual a la suma algebraica de las integrales de cada una de ellas.

INTEGRALES INDEFINIDAS

Teorema 1: Regla de las potencias.

$$\int x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + k$$

Teorema 2:

$$\int sen\,x\,dx = -\cos x + k$$

$$\int \cos x\,dx = sen\,x + k$$

Teorema 3: La integral indefinida es lineal:

1. $\int k\,f(x)dx = k\int f(x)dx$
2. $\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
3. $\int (f(x)-g(x))\,dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

UNIVERSIDAD COOPERATIVA DE COLOMBIA

FACULTAD DE INGENIERIA SECCIONAL BOGOTA
AREA: DE CIENCIAS BASICAS
CÁLCULO INTEGRAL

INTEGRALES INMEDIATAS

1. $\int 1dx = x + c$ c = constante arbitraria.
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ Si n es cualquier número real, excepto -1
3. $\int \frac{dx}{x} = ln|x| + c$ Si n es -1
4. $\int e^x dx = e^x + c$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{lna} + c$
6. $\int cosxdx = senx + c$
7. $\int senxdx = -cosx + c$
8. $\int sec^2 x \; dx = tan\, x + c$
9. $\int csc^2 x \; dx = -cot\, x + c$
10. $\int tanxsecxdx = secx + c$
11. $\int cotxcscxdx = -cscx + c$
12. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arcsenx + c$
13. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctanx + c$
14. $\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} dx = arcsecx + c$

Ejemplo 1: hallar $\int x^4 dx$

$\int x^4 dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + C = \frac{x^5}{5} + c = \frac{1}{5}x^5 + c$

Ejemplo 2: hallar $\int \sqrt{x} dx$

$\int x^{1/2} dx = (x^{1/2+1}/(1/2+1) + c$

$= x^{3/2}/(3/2) + c$

$\int x^{1/2}\; dx = \frac{2}{3} x^{3/2} + c$

$= 2/3\sqrt{x^3} + c$

Ejemplo 3: hallar $\int 7z^{-5}\; dz$

$= \int 7z^{-5}\; dz = 7\int z^{-5}\; dz$

$= 7\, \frac{z^{-5+1}}{-5+1} + c$

$= 7\; z^{-4}/-4 + c$

$= -\frac{7}{4} z^{-4} + c = -\frac{7}{4Z^4} + c$

Ejemplo 4: hallar $\int dy$

$= \int 1dy = y + c$

Ejemplo 5: hallar $\int (x^4 - 4x + 4)dx$

$= \int x^4\, dx - \int 4x\, dx + \int 4\, dx$

$= \frac{x^{4+1}}{4+1} + c1 - 4\left(\frac{x^{1+1}}{1+1} + c2\right) + 4x + c3$

$= \frac{x^5}{5} + c1 - \frac{4x^2}{2} - c2 + 4x + c3$

$= \frac{1}{5}x^5 - 2x^2 + 4x + c$

Ejemplo 6: hallar $\int \frac{dy}{y+1}$

$= \int \frac{dy}{y+1} = ln|y+1| + c$

Ejemplo 7: hallar $\int 2e^x dx$

$2\int e^x dx = 2e^x + c$

Ejemplo 8: hallar $\int \frac{2}{x} dx$

$= 2\int dx/x$

$= 2\, Ln\,[x] + c$

Ejemplo 9: hallar $\int 10^x dx$

$\int 10^x dx = \frac{10^x}{ln10} + c$

Ejemplo 10: hallar $\int \frac{7}{4} e^x\, dx$

$= \frac{7}{4}\int e^x\, dx = \frac{7}{4}\, e^x + c$

Ejemplo 11: hallar $\int (5\, e^x - \frac{4}{x} - 3e^{-x} + 2)dx$

$= 5\int e^x\, dx - 4\int \frac{dx}{x} - 3\int e^{-x}\, dx + 2\int dx$

$= 5e^x - 4ln|x| + 3\int e^{-x} + 2x + c$

Ejemplo 12: evaluar $\int (x^{1/3} - \sqrt[4]{x})dx / x^{1/2}$

$= \int x^{-1/2} (x^{1/3} - x^{1/4})\, dx$

$= \int (x^{-1/6} - x^{-1/2})\, dx$

$= \int x^{-1/6}\, dx - \int x^{-1/2}\, dx$

$= \frac{x^{5/6}}{\frac{5}{6}} - \frac{x^{3/4}}{\frac{3}{4}} + c = \frac{6}{5} x^{5/6} - \frac{4}{3} x^{3/4} + c$

Ejemplo 13: $\int (x+3)^2 dx$

$= \int (x^2 + 6x + 9)\, dx$

$= \int x^2 dx + \int 6xdx + \int 9dx$

$= \int x^2 dx + 6\int xdx + 9\int dx$

$= \frac{1}{3}\, x^3 + 6x^2 + 9x + c$

Ejemplo 14: hallar $\int (senx + cosx)\, dx$

$= \int senx\, dx + \int cosx\, dx$

$= -\cos x + sen\, x + c$

$= sen\, x - \cos x + c$

Ejemplo 15: hallar $\int 2sec^2\, x\, dx$

$2\int sec^2\, x\; dx = 2\tan x + c$

Ejemplo 16: hallar $\int cosx/(senx)^2\, dx$

$= \int \frac{1}{senx} * \frac{cosx}{senx} dx$

$= \int cscx\, cotx\, dx = -cscx + c$

Encuentre la antiderivada general $F(x)+C$ para cada una de las funciones dadas. Confirmar las soluciones diferenciándolas.

EJERCICIOS DE ESTUDIO

1. $f(x)=7$
2. $f(x)=2x$
3. $f(x)=x-4$
4. $f(x)=6x$
5. $f(x)=2x-4$
6. $f(x)=5x-e$
7. $f(x)=-3x^{-4}$
8. $f(x)=\dfrac{x^{-3}}{2}+x^2$
9. $f(x)=x^2+\pi$
10. $f(x)=5x^4+\pi$
11. $f(x)=3x^2+10x-7$
12. $f(x)=3x^3+\sqrt{5}$
13. $f(x)=x^{5/4}$
14. $f(x)=7x^{-3/4}$
15. $f(x)=x^{3/2}+7$
16. $f(x)=3x^2+\sqrt{2}$
17. $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$
18. $f(x)=x^{-\frac{3}{4}}$
19. $f(x)=3x^2+\pi x$
20. $f(x)=4x^2-x$
21. $f(x)=4x^5-x^3$
22. $f(x)=x^{100}+x^{99}$
23. $f(x)=6x^2-6x+1$
24. $f(x)=18x^8-25x^4+3x^2$
25. $f(x)=27x^7+3x^5-45x^3+\sqrt{2}x$
26. $f(x)=x^2\left(20x^7-7x^4+6\right)$
27. $f(x)=x^2\left(x^3+5x^2-3x+\sqrt{3}\right)$
28. $f(x)=\dfrac{4}{x^5}-\dfrac{3}{x^4}$
29. $f(x)=\dfrac{4x^6+3x^5-8}{x^5}$
30. $f(x)=\dfrac{2x^3-3x^2+1}{x^2}$
31. $f(x)=\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{6}{x^7}$
32. $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$
33. $f(x)=\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$
34. $f(x)=\dfrac{2}{3}x^{-1/3}$
35. $f(x)=\dfrac{1}{2}x^{-1/2}$

Encuentre las Integrales Indefinidas

$$\int\left(x^2+x\right)dx$$
$$\int\left(z^2+2z-3\right)dz$$
$$\int\left(x^2+1\right)^2\,dx$$
$$\int y^2\left(y^2-3\right)dy$$
$$\int\left(y^2-4y\right)^2\,dy$$
$$\int\left(x^3-\sqrt{x}\right)dx$$
$$\int\left(z-\sqrt{2z}\right)^2\,dz$$
$$\int\frac{x^4-2x^3+1}{x^2}\,dx$$
$$\int\frac{(s-1)(s+1)}{s}\,ds$$
$$\int\frac{1}{3}\left(t^2-2\cos t\right)dt$$
$$\int\frac{\left(z^2+1\right)^2}{\sqrt{z}}\,dz$$
$$\int\frac{s\left(s^2+1\right)^2}{\sqrt{s}}\,ds$$
$$\int\left(sent-\cos t\right)dt$$
$$\int\left(3sent-2\cos t\right)dt$$
$$\int\left(3t^2-2sent\right)dt$$
$$\int\left(t^2-2\cos t\right)dt$$
$$\int\frac{\left(3t^2-2sent\right)}{5}\,dt$$
$$\int\frac{x^3-3x^2+1}{\sqrt{x}}\,dx$$
$$\int\left(\frac{2}{5}sent-\frac{5}{2}\cos t\right)dt$$

UNIVERSIDAD COOPERATIVA DE COLOMBIA

FACULTAD DE INGENIERIA SECCIONAL BOGOTA
AREA: DE CIENCIAS BASICAS
CÁLCULO INTEGRAL

EJERCICIOS PROPUESTOS

Evaluar las siguientes integrales inmediatas

1. $\int dm$
2. $\int x^{-3} dx$
3. $\int y^{5\frac{3}{4}} dy$
4. $\int z\sqrt{z} dz$
5. $\int \frac{dx}{3x-2}$
6. $\int (x^3 + 4x^2 - 3)/\, x^2 \;\; dx$
7. $\int 5\sqrt[3]{x^7} dx$
8. $\int (t-3)^2 dt$
9. $\int (1-y)^3 dy$
10. $\int (\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x} + \sqrt[5]{x})\, dx$
11. $\int dp/p$
12. $\int (2\, e^{-t} + \frac{3}{t} - 3e^t + 2) dt$
13. $\int (3\, sen\, x \; - \; 5\, cos\, x\,)\, dx$
14. $\int 2secxcosx\, dx$
15. $\int [\frac{1}{3}\; cscy]^2\, dy$
16. $\int (\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x} + \sqrt[5]{x})\, dx$
17. $\int \frac{(S-1)(S+1)}{S} ds$
18. $\int \frac{S(S+1)^2}{S} ds$
19. $\int (sent - \cos t)\, dt$
20. $\int (3t^2 - 2sent)\, dt$

BIBLIOGRAFIA

- Stewart, James. Cálculo Conceptos y contextos. Editorial Thomson. Sexta Edición. 2012
- Leithold, Louis. Cálculo. Editorial Harla. 1998.
- Thomas, G., Finney R. Cálculo una variable. Editorial Pearson. Novena edición. 2006
- Larson, Edwars. Cálculo Tomo I. Editorial Mc-Graw Hill.
- Purcell – Valberg _Rigdon, Cálculo. Editorial Pearson. Octava Ediciòn. 2001
- Swokowski, Eael W. Cálculo. Grupo editorial Iberoamericano. 2002

Bibliografía Complementaria:

- Stewart. Precálculo. Matemáticas para el cálculo. Editorial Thompson. Quinta Edición.
- Stewart. Precálculo. Matemáticas para el cálculo. Editorial Thompson. Quinta Edición.
- Swokowski, Eael W. Álgebra y trigonometría con geometría analítica. Grupo editorial Iberoamericano.
- Granville, William. Cálculo diferencial e integral. Editorial Hispano-Americana

Webgrafia

- www.matebruknca.com
- ww.fce.unam.edu.ar
- http://www.virtual.unal.edu.co/cursos/ciencias/2001285/index.html
- http://www.aulafacil.com/matematicas-integrales/curso/Temario.htm
- http://aprendeenlinea.udea.edu.co/lms/moodle/course/view.php?id=351
- http://www.mat.uson.mx/eduardo/calculo1/
- http://calculo.tripod.com/
- http://www.itpuebla.edu.mx/alumnos/cursos_tutoriales/carlos_garcia_franchini/calculo/PaginasWeb/WebInicioCI.htm
- http://pis.unicauca.edu.co/moodle-2.1.2/course/view.php?id=60
- http://www.wolframalpha.com/input/?i=intregral+%28tanx%29%5E2%28secx%29%5E3
- http://calculo.tripod.com/