MÉTODOS DE INTEGRACIÓN – INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN

COMPETENCIA:

Utiliza el método sustitución para integrar algunas funciones convirtiéndolas en funciones conocidas, que se puedan integrar fácilmente.

FUNDAMENTACION TEÓRICA:

TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

Las dos técnicas principales para integración son: sustitución y la integración por partes.

Integración por sustitución: Este método consiste en organizar el integrando de tal manera que se genere dentro de él la sustitución de una parte de la función a la cual se llama u y la derivada de la misma a la cual denominamos du, de tal manera que el integrando se convierta en una función conocida y se pueda integrar fácilmente.

Ahora, nuestro repertorio de funciones incluye a todas las funciones elementales. Estas son las funciones constantes, las funciones potencias, las funciones logarítmica y exponencial, las funciones trigonométricas y las trigonométricas inversas y todas las funciones obtenidas a partir de ellas por medio de suma, resta, multiplicación división y composición.

Suponga que se encuentra con una integral indefinida. Si es una forma estándar, basta con escribir la respuesta. Si no, busque una sustitución que la transforme en una forma estándar.

Si la primera sustitución que intente no funciona, busque otra. Adiestrarse en esto, como en la mayoría de actividades que valen la pena, depende de la práctica.

A continuación, aparece una lista de las generalizaciones más frecuentes presentadas.

Formas integrales estándar:

1. $\int c\,du = cu + k$; constantes
2. $\int u^r\,du = \dfrac{u^{r+1}}{r+1} + k,\ r \neq -1$; potencias
3. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + k,\ r = -1$; potencias
4. $\int e^u\,du = e^u + k$; exponencial
5. $\int a^u\,du = \dfrac{a^u}{\ln a} + k,\ a \neq 1,\ a \succ 0$; exponen.
6. $$trigonométricas \begin{cases} \int sen u\,du = -\cos u + k \\ \int \cos u\,du = sen u + k \\ \int \sec^2 u\,du = \tan u + k \\ \int \csc^2 u\,du = -\cot u + k \\ \int \sec u \tan u\,du = \sec u + k \\ \int \csc u \cot u\,du = -\csc u + k \end{cases}$$

$$7.\,Trigonométricas - inversas\begin{cases}\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = sen^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+k\\[2mm] \displaystyle\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+k\\[2mm] \displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+k\end{cases}$$

Es importante recordar las identidades trigonométricas, ya que una previa sustitución de una función trigonométrica en términos de otra, favorece el desarrollo de estos procesos y en ocasiones nos permite llegar a alguna integral en forma estándar:

Identidades trigonométricas:

$$Pitagóricas:\begin{cases}sen^2 x + \cos^2 x = 1\\ 1+\tan^2 x = \sec^2 x\\ 1+\cot^2 x = \csc^2 x\end{cases}$$

$$del\ ángulo\ doble:\begin{cases}sen\,2x = 2\,sen\,x\cos x\\ \cos 2x = \cos^2 x - sen^2 x\\ \tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}\end{cases}$$

$$Recíprocas:\begin{cases}\tan x = \dfrac{sen\,x}{\cos x}\\ \cot x = \dfrac{sen\,x}{\cos x}\\ \sec x = \dfrac{1}{\cos x}\\ \csc x = \dfrac{1}{sen\,x}\end{cases}$$

Las integrales de la forma $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$, con $a \neq 0$, se resuelven completando el trinomio cuadrado perfecto y buscando un cambio de variable adecuado.

EN RESUMEN

Consiste en hacer un cambio de variable en la expresión que va a ser integrada, con el fin de reducir la expresión a una de las fórmulas de integración inmediata.

Es uno de los métodos más importantes del cálculo integral, el éxito depende de la habilidad para elegir la sustitución adecuada de la variable. El método consiste en:

a. Elegir u de acuerdo con el sitio que indique una fórmula de la tabla de integración inmediata.
b. Hallar la derivada de u, es decir du.
c. Acomodar el u y el du al ejercicio de tal manera que lleve a una fórmula dada.

Evaluar las siguientes integrales con el método de sustitución.

Ejemplo 1:

$u = x^3$
$du = 3x^2dx$
$du/3x^2 = dx$

$$\int 3x^2 e^{x^3} dx$$
$$= \int 3x^2 e^u . du/3x^2$$
$$= \int e^u du$$
$$= e^u + c$$
$$= e^{x^3} + c$$

Ejemplo 2:

u = senx
du = cosxdx
du/cosx = dx

$$\int sen^2 x cosxdx$$
$$= \int u^2 \, cosx \; du/cosx$$
$$= \int u^2 du$$
$$= 1/3 \, u^3 + c$$
$$= 1/3 \, sen^3 x + c$$

Ejemplo 3:

$u = x^2 + 3x + 4$
$du = (2x+3)\, dx$
$du/2x+3 = dx$

$$\int (x^2 + 3x + 4)\,(2x+3)dx$$
$$= \int u\,(2x+3). du/(2x+3)$$
$$= \int udu$$
$$= 1/2u^2 + c$$
$$= ½(x^2 + 3x + 4)^2 + c$$

Ejemplo 4:

$u = x^2 + 1$
$du = 2xdx$
$du/2x = dx$

$$\int xdx/\sqrt{x^2+1}$$
$$= \int x/u^{1/2} \, du/2x$$
$$= ½ \int du/u^{1/2}$$
$$= ½ \int u^{-1/2} \, du$$
$$= ½ \, [\, u^{1/2}/1/2] + c$$
$$= ½ \, [2u^{1/2}] + c \qquad = u^{1/2} + c$$
$$= (x^2 + 1)^{1/2} + c = \sqrt[2]{x^2+1} + c$$

Ejemplo 5:

$u = x^2 + 2x + 4$
$du = (2x+2)dx$
$du / 2x+2 = dx$

$$\int (4x+4)dx/(x^2+2x+4\,)$$
$$= \int 4x + 4/u \,.\, du/\, 2x + 2$$
$$= \int 2/u \, du \; = \; 2 \int du/u$$
$$= \; 2 \, Ln \, u \; + c$$
$$= \; 2 \, Ln \, (x2 + 2x + 4) \; + c$$

Ejemplo 6:

u = tan x
du = $\sec^2$x dx
du / $\sec^2$x = dx

$$\int a^{tanx} / cos^2 x \quad dx \quad a > 0, a\ diferente\ de\ 0$$
$$= \int a^{tanx} \, sec^2 x dx$$
$$= \int a^u \, sec^2 x \, du \,/ sec^2 x$$
$$= \int a^u \, du \; = \; a^u / Ln\, a \; + \; c$$
$$= \; a^{tanx} / Ln\, a \; + \; c$$

Ejemplo 7: $\int \frac{x+3}{x+2} dx$

i) Expresamos el número 3 del numerador como 2+1 y separamos la integral

u = x+2
du = dx

$$\int \frac{x+3}{x+2} dx$$
$$\int \frac{x+2+1}{x+2} dx$$
$$= \int \frac{x+2}{x+2} dx \; + \int \frac{1}{x+2} dx$$
$$= \int dx \; + \int \frac{dx}{x+2}$$
$$= \int dx \; + \int du/u \; = \; x \; + \; Ln\, u \; + \; c$$
$$= \; x \; + \; Ln\,(x+2) + \; c$$

ii) También podemos solucionarla haciendo sustitución desde el comienzo, Así:

u = x+2
u-2=x
du = dx

$$\int \frac{x+3}{x+2} dx$$
$$= \int \frac{x+3}{u} du$$
$$= \int \frac{\big((u-2)+3\big) du}{u}$$
$$= \int \frac{(u+1)}{u} du$$
$$= \int \frac{u}{u} du \; + \int \frac{1}{u} du$$
$$= \int du \; + \int du/u \; = \; u \; + \; Ln\, u \; + \; c$$
$$= \; x+2 \; + \; Ln\,(x+2) \; + \; c$$

Ejemplo 8 Comprobar que $\int (2x+1)^4\,dx = \frac{(2x+1)^5}{10} + C$

1. Se hizo $u = 2x+1$
2. Se diferenció *u*, es decir, $du = d(2x+1)$, entonces $du = 2dx$
3. Se despejó el diferencial *x*, o sea, $dx = \frac{du}{2}$
4. Se sustituyó 1. y 3. en la integral, es decir, $\int (2x+1)^4\,dx = \int u^4 \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int u^4 du = \frac{1}{2}\frac{u^5}{5} + C = \frac{u^5}{10} + C$
5. Se reemplazó u, para dar la respuesta en términos de la variable original,

$$\int (2x+1)^4\,dx = \frac{(2x+1)^5}{10} + C$$

Ejemplo 9 Comprobar que $\int \frac{x^3}{x^4+1}\,dx = \frac{1}{4}\ln(x^4+1) + C$

1. Se hizo $u = x^4+1$
2. Se diferenció *u*, es decir, $du = d(x^4+1)$, entonces $du = 4x^3dx$
3. Se despejó el diferencial *x*, o sea, $x^3dx = \frac{du}{4}$
4. Se reemplaza en la integral, $\int \frac{x^3dx}{x^4+1} = \int \frac{\frac{du}{4}}{u} = \frac{1}{4}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{4}\ln u + C$
5. Se reemplazó u, para dar la respuesta en términos de la variable original,

$$\int \frac{x^3dx}{x^4+1} = \frac{1}{4}\ln(x^4+1) + C$$

Ejemplo 10 Comprobar que $\int \frac{(e^{\sqrt{x}} + x)dx}{\sqrt{x}} = 2e^{\sqrt{x}} + \frac{2}{3}x^{3/2} + C$

Nota. Antes de pensar en hacer alguna sustitución se debe separar en varías integrales, así:

$$\int \frac{(e^{\sqrt{x}} + x)dx}{\sqrt{x}} = \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx + \int \frac{xdx}{\sqrt{x}} \qquad (1)$$

A la primera integral se le puede aplicar el método por sustitución, mientras que la segunda se hace en forma directa. Se realizan ambas integrales por separado y luego se reemplazan en (1).

A. para: $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

1. Se hizo $u = \sqrt{x}$
2. Se diferenció *u*, es decir, $du = d\left(x^{1/2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$, entonces $du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$
3. Se despejó el diferencial *x*, o sea, $2du = \frac{dx}{\sqrt{x}}$

4. Se reemplaza en la integral, $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int e^u 2du = 2\int e^u du = 2e^u + C$

5. Se reemplazó u, para dar la respuesta en términos de la variable original,
$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = 2e^{\sqrt{x}} + C$

B. Para $\int \frac{xdx}{\sqrt{x}} = \int xx^{-\frac{1}{2}} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C$

Ahora, se sustituyen los valores de estas dos integrales en (1), y se obtiene

$$\int \frac{(e^{\sqrt{x}} + x)dx}{\sqrt{x}} = 2e^{\sqrt{x}} + \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C$$

Ejemplo 11 Comprobar que $\int e^x sen(1 - e^x) dx = Cos(1 - e^x) + C$

1. Se hizo $u = 1 - e^x$
2. Se diferenció *u*, es decir, $du = d(1 - e^x) = -e^x dx$, entonces $du = -e^x dx$
3. Se despejó el diferencial *x*, o sea, $e^x dx = -du$
4. Se reemplaza en la integral,
$\int e^x sen(1 - e^x) dx = \int Senu(-du) = \int Senudu = -(-Cosu) + C = Cosu + C$
5. Se reemplazó u, para dar la respuesta en términos de la variable original,
$\int e^x sen(1 - e^x) dx = Cos(1 - e^x) + C$

Ejemplo 12

$$\int \frac{1}{x^2 + 6x + 10} dx$$

i) Completar el trinomio cuadrado perfecto

$$x^2 + 6x + 10 = (x^2 + 6x + 9) + 1, 9 = \left(\frac{6}{2}\right)^2$$

$$= (x + 3)^2 + 1, \ factorizando$$

$$\int \frac{1}{x^2 + 6x + 10} dx = \int \frac{dx}{(x + 3)^2 + 1}$$

$$= \int \frac{du}{u^2 + 1}, \ sustituyendo \ u = x + 3 \quad y \quad du = dx$$

$$= \tan^{-1}(u) + k, \ forma \ estándar$$

$$= \tan^{-1}(x + 3) + k, \ sustituyendo \ a \ u$$

Evalué las siguientes integrales por sustitución.

1. $\int 4cos2y\, dy$
2. $\int \frac{z+5}{z+3}\, dz$
3. $\int \frac{dx}{2x-5}$
4. $\int \frac{6x}{\sqrt{5-3x^2}}\, dx$
5. $\int \frac{x^2}{(1-2x^3)^4}\,\mathrm{dx}$
6. $\int \frac{2x^2+1}{(2x^3+3x+1)^{2/3}}\, dx$
7. $\int m\sqrt{m^2+1}\, dm$
8. $\int \frac{(Ln\, z)^2}{z}\, dz$
9. $\int (2x+1)\, csc^2\,(x^2+x)\, dx$
10. $\int (sen\ 3x)^5\, cos3x\, dx$
11. $\int (coty)^3 (cscy)^2 dy$
12. $\int \frac{3t}{1+9t^2} dt$
13. $\int \frac{cosx}{1+senx}\, dx$
14. $\int \frac{16x}{8x^2+2} dx$
15. $\int \frac{seny}{3+4cosy}\, dy$
16. $\int \frac{dx}{xLnx}$
17. $\int \frac{2t}{\sqrt{1-4t^2}}\mathrm{dt}$
18. $\int e^x sec^2(e^x) dx$
19. $\int e^{cosx}\, senxdx$
20. $\int e^{tan3x}\, sec^2 3xdx$

21. $\int \frac{x^3+2x^2}{x-2}dx$

22. $\int \frac{\sqrt{\tan x}}{1-sen^2 x}dx$

23. $\int e^{sen\theta\cos\theta}\cos 2\theta \, d\theta$

24. $\int \frac{\cos\left(\ln 4x^2\right)}{x}dx$

25. $\int \frac{\csc^2(\ln x)}{x}dx$

26. $\int \frac{5e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$

27. $\int \frac{x}{x^4+1}dx$

28. $\int \frac{5e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$

29. $\int \frac{senx-\cos x}{senx}dx$

30. $\int 2^{senx}\cos x \, dx$

31. $\int x10^{x^2}dx$

32. $\int \frac{sen(4t-1)}{1-sen^2(4t-1)}dt$

33. $\int \csc 2t \, dt$

34. $\int \frac{z+2}{\cot\left(z^2+4z-3\right)}dz$

35. $\int e^x \sec e^x \, dx$

36. $\int \frac{x^3+2x^2}{x^2+2}dx$

37. $\int e^x \sec^2 e^x \, dx$

38. $\int \frac{\sec^3 x+e^{senx}}{\sec x}dx$

39. $\int \frac{(6t-1)sen\sqrt{3t^2-t-1}}{\sqrt{3t^2-t-1}}dt$

40. $\int \frac{t^2\cos\left(t^3-2\right)}{sen^2\left(t^3-2\right)}dt$

41. $\int \frac{1+\cos 2x}{sen^2 2x}dx$

42. $\int \frac{\csc^2 2t}{\sqrt{1+\cot 2t}}dt$

43. $\int \frac{e^{\tan^{-1}2t}}{1+4t^2}dt$

44. $\int (t+1)e^{-t^2-2t-5}dt$