METODOS DE INTEGRACIÓN

INTEGRACIÓN POR PARTES

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA:

Si no es posible resolver un enunciado utilizando el método de integración por sustitución, es viable utilizar una doble sustitución, mejor conocida como integración por partes.

Este método se aplica para el producto de dos funciones. En especial funciones trigonométricas inversas y función logaritmo. Donde una de ellas es la derivada de una función conocida y la integral original se transforma por otra más simple.

Este método tiene como base la integración de la fórmula para la derivada de un producto de dos funciones.

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones definidas, entonces:

$D_x\left[f(x)g(x)\right]= f'(x)g(x)+ f(x)g'(x)$, concepto derivada de un producto

Al integrar los dos lados de la igualdad obtenemos:

$$\int D_x\left[f(x)g(x)\right]dx=\int f'(x)g(x)dx+\int f(x)g'(x)dx$$

$$\left[f(x)g(x)\right]=\int f'(x)g(x)dx+\int f(x)g'(x)dx$$

Al sustituir: $\begin{array}{ll} u=f(x) & du=f'(x)dx \\ v=g(x) & dv=g'(x)dx \end{array}$

Obtenemos:

$$u.v=\int v.du-\int u.dv$$

Organizando las expresiones, tenemos:

$$\int u.dv=u.v-\int v.du$$

FÓRMULA DE INTEGRACIÓN POR PARTES

En Resumen Si u = f(x), v = g(x), y si f´ y g´ son continuas, entonces

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Al aplicar la formula anterior a una integral, se empieza por hacer que una parte del integrando, corresponda a **dv**. La expresión que se usa para dv debe incluir a la diferencial dx. Después de elegir dv se toma **u** como el resto del integrando y se encuentra du.

NORMAS PARA LA INTEGRACIÓN POR PARTES.

1) Tratar de que dv sea la parte más complicada de un integrando que se ajuste a una fórmula de integración básica. Entonces **u** será el factor o factores restantes del integrando.

2) Tratar de que **u** sea la parte del integrando cuya derivada sea una función más simple que u. entonces dv será el factor o factores restantes del integrando.

Para determinar la solución de una integral utilizando el método de integración por partes es conveniente realizar los siguientes pasos:

- Primero se escogen u y dv.
- Segundo, se deriva u para determinar du
- Tercero, se integra dv para hallar v.
- Finalmente, se aplica la fórmula de integración por partes y se soluciona la integral indicada.

Existe una variedad de integrales que se pueden desarrollar, usando la relación:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

El problema es elegir u y $dv,$ por lo cual es útil la siguiente identificación:

I: Función trigonométrica inversa.
L: Función logarítmica
A: Función algebraica
T: Función trigonométrica
E: Función exponencial.

La elección conveniente para el *u* y el *dv*, dependerá de la ubicación de los términos funcionales en la palabra ILATE. El de la izquierda corresponde al *u*, y el otro será el *dv*.

Ejemplo 1. $\int x\, cosx\, dx$

Solución: $\begin{matrix} I & L & A & T & E \\ & & \downarrow & \downarrow & \\ & & x & \cos x & \end{matrix}$

$u = x \qquad\qquad dv = cosx$

$du = dx \qquad\qquad v = senx$

$$\int x\, cosx\, dx = x\, senx - \int senx\, dx = x\, senx + cosx + c$$

Respuesta: $\int x\, cox\, dx = x\, senx + cosx + c$

Ejemplo 2. $\int x\, senx\, dx$

$u = x \qquad dv = senxdx$
$du = dx \qquad v = -\, cosx$

$\int xsenxdx$
$= -x\cos - \int(-cosx)\, dx$
$= -x\, cosx + \int cosx\, dx$
$= -x\, cosx + cosx + c$

Ejemplo 3. $\int x\, sec^2 3\, x\, dx$

Solución: $\begin{matrix} I & L & A & T & E \\ & & \downarrow & \downarrow & \\ & & x & sec^2 3x\, dx & \end{matrix}$

$u = x \qquad dv = sec^2 3x\, dx$
$dv = dx \qquad v = \frac{1}{3} tg\, 3x$

$$\int x\, sec^2\, x\, dx = \frac{1}{3} tg\, 3x - \frac{1}{3}\int tg3x\, dx = \frac{x\, tg\, 3x}{3} - \frac{1}{9} ln|sec3x| + c$$

Respuesta: $\int x\, sec^2\, x\, dx = \frac{xtg3x}{3} - \frac{1}{9} ln|sec3x| + c$

Ejemplo 4. $\int xe^x dx$

$u = x \qquad dv = e^x dx$
$du = dx \qquad v = e^x$

$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx$
$= xe^x - e^x + c$
$= e^x (x-1) + c$

Respuesta: $\int x\, e^x\, dx = e^x (x-1) + c$

Ejemplo 5. $\int \frac{\boldsymbol{x\,dx}}{\boldsymbol{e^x}} = \int xe^{-x}\,dx$

I L A T E

$\downarrow$ $\downarrow$

x e^{-x}

$u = x$ $dv = e^{-x}$

$du = dx$ $v = -e^{-x}$

$\int xe^{-x} = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx$

$$\int xe^{-x} = -xe^{-x} - e^{-x} + c = e^{-x}(-x-1) + c$$

$$\int xe^{-x} = -e^{-x}(x+1) + c$$

Respuesta: $\int xe^{-x}\,dx = -\frac{x+1}{e^x} + c$

El Ejemplos 6 es una Integral Cíclica

Ejemplo 6. $\int \boldsymbol{e^x\,senx\,dx}$

$u = e^x$ $dv = senxdx$
$du = e^x dx$ $v = -cosx$

$\int e^x senxdx = -e^x cosx - \int - e^x cosxdx$

$\int e^x senxdx = -e^x cosx + \int e^x cosxdx$

$u = e^x$ $dv = cosxdx$
$du = e^x dx$ $v = senx$

$\int e^x senxdx = -e^x cosx + [e^x senx - e^x \int senxdx]$

$\int e^x senxdx = -e^x cosx + e^x senx - e^x \int senxdx$

$\int e^x senxdx + \int e^x senxdx = -e^x cosx + e^x senx$

$2\int e^x senxdx = -e^x cosx + e^x senx$

$\int e^x senxdx = (-e^x cosx + e^x senx)/2 + c$

$\int e^x senxdx = (e^x senx - e^x cosx)/2 + c$

$\int e^x senxdx = \frac{e^x}{2}(senx - cosx) + c$

Respuesta: $\int e^x senxdx = \frac{e^x}{2}(senx - cosx) + c$

Ejemplo 7. $\int x^2 e^x dx$

$u = x^2$ $\quad dv = e^x dx$
$du = 2xdx$ $\quad v = e^x$

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2xe^x\, dx = x^2 e^x - 2\int xe^x\, dx$$

$\int xe^x dx$
$u = x$ $\quad dv = e^x dx$
$du = dx$ $\quad v = e^x$

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\,[xe^x - \int e^x dx] = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + c = e^x(x^2 - 2x + 2) + c$$

Respuesta: $\int x^2 e^x dx = e^x(x^2 - 2x + 2) + c$

Ejemplo 8. $\int lnxdx$

Solución: I L A T E

$$\begin{array}{cc} L & A \\ \downarrow & \downarrow \\ lnx & 1 \end{array}$$

$u = lnx$ $\quad dv = 1\, dx$
$du = \frac{dx}{x}$ $\quad v = x$

$$\int lnxdx = xlnx - \int dx = xlnx - x + c = x(lnx - 1) + c$$

Respuesta: $\int lnxdx = x(lnx - 1) + c$

Ejemplo 9.

$u = Lnx$ $\quad dv = xdx$
$du = 1/x\, dx$ $\quad v = ½\, x^2$

$$\int xLnxdx = 1/2x^2 Lnx - \int 1/2x^2 dx/x = 1/2x^2 Lnx - ½\int xdx = 1/2x^2 Lnx - ½\,.\,½\, x^2 + c = 1/2x^2 Lnx - ¼\, x^2 + c$$

Respuesta: $\int xlnxdx = 1/2x^2 Lnx - ¼\, x^2 + c$

Ejemplo 10.

$u = Logx$ $\quad dv = dx$
$du = 1/x\, dx$ $\quad v = x$

$$\int Logxdx = xLogx - \int dx = xLogx - x + c = x(Logx - 1) + c$$

Respuesta: $\int logxdx = x(logx - 1) + c$

Ejemplo 11. $\int ln^2 x\, dx$

Solución: I L A T E

ln^2x 1

$u = ln^2x$ $dv = 1\, dx$

$du = 2lnx\frac{1}{x}dx$ $v = x$

$\int ln^2 x\, dx = xln^2x - 2\int lnx\frac{1}{x}xdx = xln^2x - 2\int lnxdx$

Donde:

$\int lnxdx =$

Solución: I L A T E

lnx 1

$u = lnx$ $dv = 1\, dx$

$du = \frac{dx}{x}$ $v = x$

$\int lnxdx = xlnx - \int dx = xlnx - x + c = x(lnx - 1) + c$

Luego:

$\int ln^2 x\, dx = xln^2x - 2\lfloor x(lnx-1)+c\rfloor = xln^2x - 2x(lnx-1) + c$

Respuesta: $\int ln^2 x\, dx = xln^2x - 2x(lnx-1) + c$

Algunas integrales por partes comunes:

1) $\int x^n\, e^{ax}dx$

$\int x^n\, senaxdx$

$\int x^n\, cosaxdx$

Sea u= x^n y dv= e^{ax}dx = sen axdx =cosaxdx

2) $\int x^n\, Ln\, xdx$

$\int x^n\, arcsenaxdx$

$\int x^n\, arctanaxdx$

$u = Lnx, arcsenax, arctanax$

$dv = x^n$

3) $\int e^{ax} senbxdx$

$\int e^{ax} cosbxdx$

$sea\ u = senbx\ o\ = cosbx$

$dv = e^{ax}dx$

UNIVERSIDAD COOPERATIVA DE COLOMBIA

FACULTAD DE INGENIERIA SECCIONAL BOGOTA
AREA: DE CIENCIAS BASICAS
CÁLCULO INTEGRAL

EJERCICIOS PROPUESTOS

En Resumen Si u = f(x), v = g(x), y si f´ y g´ son continuas, entonces

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Evalúe las siguientes integrales

1. $\int xe^{2x}\, dy$
2. $\int xe^{x^2}\, dx$
3. $\int y^4 e^y\, dy$
4. $\int x^2\, e^{2x}\, dx$
5. $\int x^2 (Lnx)^2\, dx$
6. $\int \frac{(Lny)^2}{y} dy$
7. $\int m^3 Lnm\, dm$
8. $\int \sqrt{x}\, Lnx\, dx$
9. $\int e^{2x} senxdx$
10. $\int x^2\, cosxdx$
11. $\int e^x cos2xdx$
12. $\int xcos5xdx$
13. $\int ycsc^2 3ydy$
14. $\int x2^x dx$
15. $\int m^3 cos\,(m^2)dm$
16. $\int sen(Lnx)\, dx$
17. $\int e^{4x} sen5xdx$
18. $\int e^{-x} senxdx$
19. $\int tan^{-1}\, ydy$
20. $\int \frac{x5}{\sqrt{1-x^3}} dx$

UNIVERSIDAD COOPERATIVA DE COLOMBIA

FACULTAD DE INGENIERIA SECCIONAL BOGOTA
AREA: DE CIENCIAS BASICAS
CÁLCULO INTEGRAL

EJERCICIOS DE ESTUDIO

Integre cada una de las funciones dadas:

1. $\int x e^{-x} dx$
2. $\int x^2 \, sen x \, dx$
3. $\int x^3 e^{-x} dx$
4. $\int x \, sen x \, dx$
5. $\int x^2 e^{3x} dx$
6. $\int x \sec x \tan x \, dx$
7. $\int x^2 sen 4x \, dx$
8. $\int x \csc^2 3x \, dx$
9. $\int x e^{-2x} dx$
10. $\int sen^{-1} x \, dx$
11. $\int x(2x+3)^{99} dx$
12. $\int x^3 e^{-x^2} dx$
13. $\int e^{3x} \cos 2x \, dx$
14. $\int 2x \, sen^{-1} x^2 \, dx$
15. $\int x \tan^{-1} x \, dx$
16. $\int \cos^{-1} x \, dx$
17. $\int x^2 \ln x \, dx$
18. $\int (x+1)^{10}(x+2) dx$
19. $\int x \tan^{-1} x \, dx$
20. $\int x \sec^2 x \, dx$
21. $\int e^{-x} sen x \, dx$
22. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx$
23. $\int t e^{5t+\pi} dt$
24. $\int x \, sen 4x \, dx$
25. $\int sen x \ln \cos x \, dx$
26. $\int x^2 sen 2x \, dx$
27. $\int x^3 e^{x^2} dx$
28. $\int \theta \, sen\theta \cos\theta \, d\theta$
29. $\int t^2 \ln t \, dt$
30. $\int \sec^3 x \, dx$
31. $\int t^2 e^{4t} dt$
32. $\int t^3 e^t dt$
33. $\int e^{2\phi} sen 3\phi \, d\phi$
34. $\int x \, sen 2x \, dx$
35. $\int 4x \sec^2 2x \, dx$
36. $\int e^{-\phi} \cos 3\phi \, d\phi$
37. $\int x(2x+3)^{99} dx$
38. $\int (r^2+r+1) e^r dr$
39. $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^3}} dx$
40. $\int \ln \sqrt{x} \, dx$
41. $\int x^3 \cos(x^2) dx$
42. $\int \cos(\ln x) \, dx$
43. $\int x^5 e^x dx$
44. $\int (x^2-1) e^x dx$
45. $\int x 2^x dx$
46. $\int (x^2-5x) e^x dx$
47. $\int \cos \sqrt{x} \, dx$
48. $\int (\ln x)^2 dx$
49. $\int x^2 sen x \, dx$
50. $\int \theta \cos(\pi\theta) \, d\theta$
51. $\int x^5 \sqrt{x^3+4} \, dx$
52. $\int e^{-2x} sen 2x \, dx$
53. $\int \frac{t^7}{(7-3t^4)^{\frac{3}{2}}} dt$
54. $\int p^4 e^{-p} dp$
55. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$

BIBLIOGRAFIA

- Stewart, James. Cálculo Conceptos y contextos. Editorial Thomson. Sexta Edición. 2012
- Leithold, Louis. Cálculo. Editorial Harla. 1998.
- Thomas, G., Finney R. Cálculo una variable. Editorial Pearson. Novena edición. 2006
- Larson, Edwars. Cálculo Tomo I. Editorial Mc-Graw Hill.
- Purcell – Valberg _Rigdon, Cálculo. Editorial Pearson. Octava Ediciòn. 2001
- Swokowski, Eael W. Cálculo. Grupo editorial Iberoamericano. 2002

Bibliografía Complementaria:

- Stewart. Precálculo. Matemáticas para el cálculo. Editorial Thompson. Quinta Edición.
- Stewart. Precálculo. Matemáticas para el cálculo. Editorial Thompson. Quinta Edición.
- Swokowski, Eael W. Álgebra y trigonometría con geometría analítica. Grupo editorial Iberoamericano.
- Granville, William. Cálculo diferencial e integral. Editorial Hispano-Americana

WEBGRAFIA

- www.matebruknca.com
- www.fce.unam.edu.ar
- http://www.virtual.unal.edu.co/cursos/ciencias/2001285/index.html
- http://www.aulafacil.com/matematicas-integrales/curso/Temario.htm
- http://aprendeenlinea.udea.edu.co/lms/moodle/course/view.php?id=351
- http://www.mat.uson.mx/eduardo/calculo1/
- http://calculo.tripod.com/
- http://www.itpuebla.edu.mx/alumnos/cursos_tutoriales/carlos_garcia_franchini/calculo/PaginasWeb/WebInicioCI.htm
- http://pis.unicauca.edu.co/moodle-2.1.2/course/view.php?id=60
- http://www.wolframalpha.com/input/?i=intregral+%28tanx%29%5E2%28secx%29%5E3
- www.matematicatuya.com