DEFINICIÓN DE LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN

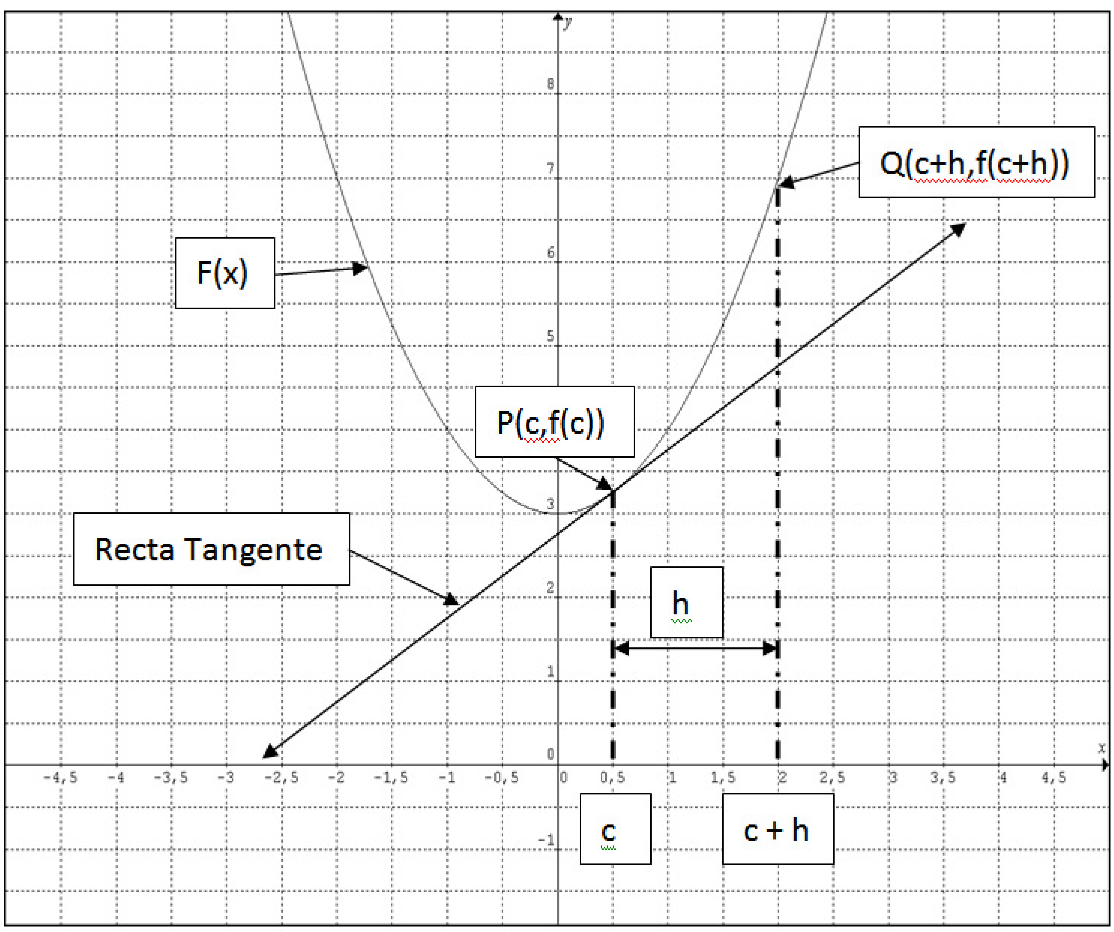
La derivada de una función $f(x)$ respecto de (x) es la función $f'(x)$ (se lee "f prima de (x) y está dada por:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

El proceso de calcular la derivada se denomina derivación. Se dice que $f(x)$ es derivable en c si existe $f'(c)$, es decir,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \text{ existe}$$

La derivada se puede interpretar como la pendiente de una recta tangente a una curva en un punto determinado o como una razón de cambio instantánea.



Al calcular el límite $\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ lo que sucede es que el punto Q empieza a acercarse hacia el punto P hasta que llegar muy próximo a él (ver gráfica), en ese momento se está calculando la derivada de f(x) en el punto x=c representada por la pendiente de la recta tangente en el punto (c,f(c)).

REGLAS DE DERIVACIÓN

1. Derivada de una constante

Sea la función $f(x) = c$, donde c es una constante o número real. La derivada será $f'(x) = 0$.

Ejemplo 1: $f(x) = 9 \quad entonces \quad f'(x) = 0$

Ejemplo 2: $m(x) = -\pi \quad entonces \quad m'(x) = 0$

Ejemplo 3: $h(x) = \sqrt[3]{5} \quad entonces \quad h'(x) = 0$

2. Derivada de una potencia de x

Sea la Función $f(x) = x^n$, la derivada será $f'(x) = nx^{n-1}$, donde n es cualquier número real.

Ejemplo 1:

$f(x) = x^3 \quad entonces \quad f'(x) = 3x^{3-1} = 3x^2$

Ejemplo 2:

$t(x) = x^5 \quad entonces \quad t'(x) = 5x^{5-1} = 5x^4$

Ejemplo 3:

$r(x) = x^{-2} \quad entonces \quad r'(x) = (-2)x^{-2-1} = -2x^{-3}$

3. Derivada de una constante por una función

Sea la Función $f(x) = cx^n$, la derivada será $f`(x) = cnx^{n-1}$

Ejemplo 1:

$f(x) = 6x^4 \quad entonces \quad f'(x) = 6(4)x^{4-1} = 24x^3$

Ejemplo 2:

$h(x) = -2x^3 \quad entonces \quad h'(x) = -2(3)x^{3-1} = -6x^2$

Ejemplo 3:

$q(x) = 5x^{-6} \quad entonces \quad q'(x) = 5(-6)x^{-6-1} = -30x^{-7}$

Ejemplo 4:

$p(x) = 6x \quad entonces \quad p'(x) = 6(1)x^{1-1} = 6x^0 = 6$

4. Derivada de una suma o resta de funciones

La derivada de una suma y/o diferencia de funciones es la suma y/o diferencia de las derivadas de cada uno de los términos por separado. Entonces:

Sea $h(x) = [f(x) \pm g(x) \pm q(x)]$

La derivada será $h'(x) = [f'(x) \pm g'(x) \pm q'(x)]$

Ejemplo 1:

$f(x) = 2x^4 + 8x^2 + 9x - 3$

$f'(x) = 8x^3 + 16x + 9$ Derivar cada término por separado aplicando las reglas anteriormente vistas.

Ejemplo 2:

$p(x) = -5x^{-2} - 3x^3 - 12x - 20$

$p'(x) = 10x^{-3} - 9x - 12$

Ejemplo 3:

$s(x) = -3x^4 - 8x^{-2} - 2x$

$s'(x) = -12x^3 + 16x^{-3} - 2$

Exponentes fraccionarios $x^{\frac{a}{b}}$ y términos de la forma $\sqrt[b]{x^a}$.

Los términos de la forma $\sqrt[b]{x^a}$ para expresarlos como exponente se aplica la propiedad de radicación $\sqrt[b]{x^a} = x^{\frac{a}{b}}$.

Ejemplo 1: derivar la función $t(x) = 4x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{5}{3}} + \sqrt[3]{x}$

El primer paso es convertir los radicales en exponentes

$t(x) = 4x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{5}{3}} + \sqrt[3]{x}$ función inicial

Convertir el término $\sqrt[3]{x}$ en exponente aplicando $\sqrt[b]{x^a} = x^{\frac{a}{b}}$

$t(x) = 4x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{5}{3}} + x^{\frac{1}{3}}$

$t´(x) = 4\left(\frac{1}{2}\right)x^{\frac{1}{2}-1} - 2\left(\frac{5}{3}\right)x^{\frac{5}{3}-1} + \left(\frac{1}{3}\right)x^{\frac{1}{3}-1}$ Derivar cada término por separado aplicando las reglas anteriormente vistas.

$t´(x) = 2x^{-\frac{1}{2}} - \frac{10}{3}x^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ Simplificando, resultado final.

Ejemplo 2: derivar la función $l(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{5}} - 5\sqrt[4]{x^3} - 2x^3 + 4$

El primer paso es convertir los radicales en exponentes

$l(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{5}} - 5\sqrt[4]{x^3} - 2x^3 + 4$ función inicial

Convertir los términos con radical en exponente aplicando $\sqrt[b]{x^a} = x^{\frac{a}{b}}$

$l(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{5}} - 5x^{\frac{3}{4}} - 2x^3 + 4$

$l´(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)x^{\frac{1}{5}-1} - 5\left(\frac{3}{4}\right)x^{\frac{3}{4}-1} - 2(3)x^{3-1}$ Derivar cada término por separado aplicando las reglas anteriormente vistas.

$l´(x) = \frac{1}{15}x^{-\frac{4}{5}} - \frac{15}{4}x^{-\frac{1}{4}} - 6x^2$ Simplificando, resultado final.

5. Derivada de un producto de funciones

Sea $h(x) = f(x) * g(x)$, la derivada será $h´(x) = f(x) * g´(x) + g(x) * f´(x)$.

Es decir, la derivada de un producto de dos funciones es: “la primera, por la derivada de la segunda, más la segunda por la derivada de la primera".

6. Derivada de un cociente de funciones

Sea $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$,la derivada será $h´(x) = \frac{g(x)*f´(x) - f(x)*g´(x)}{[g(x)]^2}$

Es decir, la derivada de un cociente de dos funciones es: “la segunda, por la derivada de la primera, menos la primera por la derivada de la segunda; dividida entre la segunda al cuadrado”.

El producto y cociente de funciones se desarrollará más adelante.

7. Regla de la cadena

Si $h(x) = [f(x)]^n$, entonces la derivada es $h'(x) = n[f(x)]^{n-1} * f'(x)$

$h'(x) = n[f(x)]^{n-1} * f'(x)$

Función Interna

Derivar la Función Interna

La regla de la cadena se utiliza para derivar funciones algebraicas de los siguientes tipos:

$f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ Funciones Raíz

$f(x) = (2x-1)^5$ Función con paréntesis elevado a una potencia

Es importante aclarar que la regla de la cadena es de amplio uso en las funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.

Ejemplo 1: derivar $s(x) = (2x^2+3)^6$

$s(x) = (2x^2+3)^6$ $[f(x)]^n$, en este caso la función $2x^2+3$ es la función interna y se encuentra elevada a la 6.

$s'(x) = 6(2x^2+3)^{6-1} * (4x)$ Aplicar $h'(x) = n[f(x)]^{n-1} * f'(x)$

Función interna

Derivada de la Función interna

$s'(x) = 6(2x^2+3)^5 * (4x)$ Organizar términos el 4x pasa a la izquierda

$s'(x) = 24x(2x^2+3)^5$ Resultado final

Ejemplo 2: derivar $r(x) = \sqrt[3]{x^2+12}$. Aplicando la propiedad de radicación se transforma el radical en exponente. $\sqrt[b]{(f(x))^a} = (f(x))^{\frac{a}{b}}$

$r(x) = \sqrt[3]{x^2-12x} = (x^2-12x)^{\frac{1}{3}}$ Aplicar propiedad de radicación

$r(x) = (x^2-12x)^{\frac{1}{3}}$ $[f(x)]^n$, en este caso la función x^2-12x es la función interna y se encuentra elevada a la $\frac{1}{3}$.

$r'(x) = \frac{1}{3}(x^2-12x)^{\frac{1}{3}-1} * (2x-12)$ Aplicar $h'(x) = n[f(x)]^{n-1} * f'(x)$

Función interna

Derivada de la Función interna

$r'(x) = \frac{1}{3}(x^2-12x)^{-\frac{2}{3}} * (2x-12)$

$r'(x) = \frac{1}{3}(2x-12)(x^2-12x)^{-\frac{2}{3}}$ Pasar (2x-12) a la izquierda

$r'(x) = (\frac{2}{3}x-4)\,(x^2-12x)^{-\frac{2}{3}}$ Simplificar

$r'(x) = \frac{(\frac{2}{3}x-4)}{(x^2-12x)^{\frac{2}{3}}}$ Bajar el término $(x^2-12x)^{-\frac{2}{3}}$ con potencia positiva

$r'(x) = \frac{(\frac{2}{3}x-4)}{\sqrt[3]{(x^2-12x)^2}}$ Convertir en radical el término $(x^2-12x)^{\frac{2}{3}}$

8. Función exponencial. aplicación de la regla de la cadena

Si $f(u) = e^u$ su derivada es $f'(u) = e^u * (u')$, la variable u es el exponente de (e) y (u') significa derivada de (u).

Ejemplo 1: derivar $g(x) = e^{2x+1}$

$g(x) = e^{2x+1}$ Función inicial

$g'(x) = \underbrace{e^{2x+1}}_{\boxed{e^u}} * \underbrace{(2)}_{\boxed{U'}}$ Aplicar la fórmula $f'(u) = e^u * (u')$

$g'(x) = e^{2x+1} * (2)$ Pasar el número 2 a la izquierda

$g'(x) = 2e^{2x+1}$ Respuesta

Ejemplo 2: derivar $g(x) = e^{x^{\frac{1}{2}}+x}$

$g(x) = e^{x^{\frac{1}{2}}+x}$ Función inicial

$g'(x) = \underbrace{e^{x^{\frac{1}{2}}+x}}_{\boxed{e^u}} * \underbrace{(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 1)}_{\boxed{U'}}$ Aplicar fórmula $f'(u) = e^u * (u')$

$g'(x) = (\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 1)e^{x^{\frac{1}{2}}+x}$ El término $(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 1)$ pasa a la izquierda

Ejemplo 3: derivar $g(x) = e^{-4x^3+5x}$

$g(x) = e^{-4x^3+5x}$ Función inicial

$g'(x) = e^{-4x^3+5x} * (-12x^2 + 5)$ Aplicar fórmula $f'(u) = e^u * (u')$

$g'(x) = (-12x^2 + 5)e^{-4x^3+5x}$ El término $(-12x^2 + 5)$ pasa a la izquierda

9. Función logaritmo Natural (Ln), aplicación de la regla de la cadena

Si $f(u) = Ln(u)$ su derivada es $f'(u) = \frac{1}{u} * (u')$, la variable (u) es la que acompaña al logaritmo natural y (u´) es la derivada de (u).

Ejemplo 1: derivar $q(x) = Ln(x^3)$

$q(x) = Ln(x^3)$ Función inicial

$q'(x) = \underbrace{\frac{1}{x^3}}_{\boxed{\frac{1}{u}}} * \underbrace{(3x^2)}_{\boxed{U'}}$ Aplicar la fórmula $f'(u) = \frac{1}{u} * (u')$

$q'(x) = \frac{3x^2}{x^3}$ Organizar la expresión como fracción para simplificar

$q'(x) = \frac{3}{x}$ Respuesta

Ejemplo 2: derivar $m(x) = Ln(5x^4 - 4x^2)$

$m(x) = Ln(5x^4 - 4x)$ Función inicial

$m´(x) = \frac{1}{(5x^4-4x)} * (20x^3 - 8x)$ Aplicar la fórmula $f´(u) = \frac{1}{u} * (u´)$

$m´(x) = \frac{(20x^3-8x)}{(5x^4-4x)}$ Organizar los términos como fracción para simplificar

$m´(x) = \frac{4x(5x^2-2)}{x(5x^3-4)}$ Factorizar por factor común y simplificar

$m´(x) = \frac{4(5x^2-2)}{(5x^3-4)}$ Respuesta

Ejemplo 3: derivar $n(x) = Ln(\sqrt{x^2+1})$

$n(x) = Ln(\sqrt{x^2+1})$ Función inicial

$n(x) = Ln(x^2+1)^{\frac{1}{2}}$ Convertir el radical $\sqrt{x^2+1}$ en exponente

$n´(x) = \underbrace{\frac{1}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}}_{\boxed{\frac{1}{u}}} * \underbrace{[\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} * (2x)]}_{\boxed{U´}}$ Aplicar $f´(u) = \frac{1}{u} * (u´)$

Para derivar la función $(x^2+1)^{\frac{1}{2}}$ mirar el tema de regla de regla de la cadena para funciones algebraicas visto anteriormente.

$n´(x) = \frac{(2x)(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}}{2(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}$ Organizar los términos como fracción para simplificar

$n´(x) = \frac{(x)(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}$ Simplificar los términos de bases iguales x^2+1

$n´(x) = \frac{x}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}$ Aplicar propiedad de potenciación de bases iguales

$n´(x) = \frac{x}{x^2+1}$ Respuesta

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

A continuación se presentan las derivadas de las funciones trigonométricas: seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante.

10. Función Seno

Si $f(u) = Sen(u)$, su derivada es $f´(u) = Cos(u) * (u´)$, la variable (u) es la que acompaña al Seno y (u´) es la derivada de u.

Ejemplo 1: derivar $f(x) = Sen(x^2+1)$

$f(x) = Sen(x^2+1)$

$f´(x) = \underbrace{Cos(x^2+1)}_{\boxed{Cos(u)}} * \underbrace{(2x)}_{\boxed{(u´)}}$ Aplicar $f´(u) = Cos(u) * (u´)$

$f´(x) = Cos(x^2+1) * (2x)$ Pasar el término 2x a la izquierda

$f´(x) = 2xCos(x^2+1)$ Respuesta

11. Función Coseno

Si $f(u) = Cos(u)$, su derivada es $f´(u) = -Sen(u) * (u´)$, la variable (u) es la que acompaña al Coseno y (u´) es la derivada de u.

Ejemplo 2: derivar $g(x) = Cos(\sqrt{2x^3+4})$

$g(x) = Cos(\sqrt{2x^3+4})$

$g(x) = Cos((2x^3+4)^{\frac{1}{2}})$ Convertir el radical $\sqrt{2x^3+4}$ a exponente

$g´(x) = -Sen\left(\left(2x^3+4\right)^{\frac{1}{2}}\right) * [\frac{1}{2}(2x^3+4)^{-\frac{1}{2}} * (6x^2)]$

-Sen(u) (u´) Aplicar $f´(u) = -Sen(u) * (u´)$

Para derivar la función $(2x^3+4)^{\frac{1}{2}}$ mirar el tema de regla de regla de la cadena para funciones algebraicas visto anteriormente.

$g´(x) = -Sen\left(\left(2x^3+4\right)^{\frac{1}{2}}\right) * [3x^2(2x^3+4)^{-\frac{1}{2}}]$ Simplificar y organizar (u´)

$g´(x) = -3x^2(2x^3+4)^{-\frac{1}{2}}Sen\left(\left(2x^3+4\right)^{\frac{1}{2}}\right)$ Pasar a la izquierda $3x^2(2x^3+4)^{-\frac{1}{2}}$

$g´(x) = -3x^2(2x^3+4)^{-\frac{1}{2}}\,Sen\left(\left(2x^3+4\right)^{\frac{1}{2}}\right)$ Respuesta

12. Función Tangente

Si $f(u) = tan(u)$, su derivada es $f´(u) = Sec^2(u) * (u´)$, la variable (u) es la que acompaña a la tangente y (u´) es la derivada de u.

Ejemplo 3: derivar $h(x) = \tan(2x^4 - x^2)$

$h(x) = \tan(2x^4 - x^2)$

$h´(x) = \mathrm{Sec}^2(2x^4 - x^2) * (8x^3 - 2x)$ Aplicar $f´(u) = Sec^2(u) * (u´)$

$Sec^2(u)$ $(u´)$

$h´(x) = \mathrm{Sec}^2(2x^4 - x^2) * (8x^3 - 2x)$ Pasar el término $8x^3 - 2x$ a la izquierda

$h´(x) = (8x^3 - 2x)\,\mathrm{Sec}^2(2x^4 - x^2)$ Respuesta

13. Función Secante

Si $f(u) = sec(u)$, su derivada es $f´(u) = Sec(u) * \tan(u) * (u´)$, la variable (u) es la que acompaña a secante y (u´) es la derivada de u.

Ejemplo 4: derivar $l(x) = \mathrm{Sec}(\sqrt{x} + 2)$

$l(x) = \mathrm{Sec}(\sqrt{x} + 2)$

$l(x) = \mathrm{Sec}(x^{\frac{1}{2}} + 2)$ Convertir el término $\sqrt{x}$ a exponente

$l´(x) = \mathrm{Sec}\left(x^{\frac{1}{2}} + 2\right) * tan\left(x^{\frac{1}{2}} + 2\right) * (\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}})$ Aplicar $f´(u) = Sec(u)\tan(u) * (u´)$

$l'(x) = (\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}})\text{Sec}\left(x^{\frac{1}{2}}+2\right) tan\left(x^{\frac{1}{2}}+2\right)$

14. Función Cotangente

Si $f(u) = cot(u)$, su derivada es $f'(u) = -csc^2(u) * (u')$, la variable (u) es la que acompaña a cotangente y (u´) es la derivada de u.

Ejemplo 5: derivar $t(x) = \cot(5x^2 - x)$

$t(x) = \cot(5x^2 - x)$

$t'(x) = -\csc^2(5x^2 - x) * (10x - 1)$ Aplicar $f'(u) = -csc^2(u) * (u')$

$t'(x) = -(10x - 1)\csc^2(5x^2 - x)$

$t'(x) = (1 - 10x)\csc^2(5x^2 - x)$

15. Función Cosecante

Si $f(u) = csc(u)$, su derivada es $f'(u) = -\csc(u) * \cot(u) * (u')$, la variable (u) es la que acompaña a cosecante y (u´) es la derivada de u.

Ejemplo 6: derivar $p(x) = \csc(5\sqrt[3]{x^5} - 2)$

$p(x) = \csc(5\sqrt[3]{x^5} - 2)$

$p(x) = \csc(5x^{\frac{5}{3}} - 2)$ Convertir el término $5\sqrt[3]{x^5}$ en exponente

$p'(x) = -\csc\left(5x^{\frac{5}{3}} - 2\right) co\,t\left(5x^{\frac{5}{3}} - 2\right) * (\frac{25}{3}x^{\frac{2}{3}})$

$p'(x) = -\frac{25}{3}x^{\frac{2}{3}}\csc\left(5x^{\frac{5}{3}} - 2\right) co\,t\left(5x^{\frac{5}{3}} - 2\right)$ Aplicar $f'(u) = -\csc(u)\cot(u) * (u')$

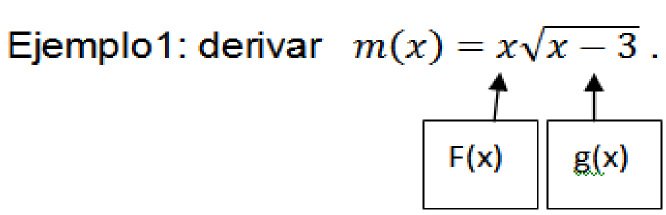
DERIVADAS DE PRODUCTOS Y COCIENTES

Regla del producto. Multiplicación de funciones

Sea $h(x) = f(x) * g(x)$, la derivada será $h'(x) = f(x) * g'(x) + g(x) * f'(x)$.

Regla del cociente. División de funciones

Sea $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$,la derivada será $h'(x) = \frac{g(x)*f'(x) - f(x)*g'(x)}{[g(x)]^2}$



Como se puede observar es un **producto de funciones**, para derivar se utiliza:

$h'(x) = f(x) * g'(x) + g(x) * f'(x)$

Identificación de los términos en la función $m(x) = x\sqrt{x-3}$

$$f(x) = x$$

$$g(x) = \sqrt{x-3} = (x-3)^{\frac{1}{2}}$$

Calculamos las derivadas

$$f'(x) = 1$$

$$g'(x) = \frac{1}{2}(x-3)^{-\frac{1}{2}} * (1)$$

$$g'(x) = \frac{1}{2}(x-3)^{-\frac{1}{2}}$$ Simplificando

Aplicando la regla del producto para $m(x) = x\sqrt{x-3}$

$m'(x) = f(x) * g'(x) + g(x) * f'(x)$

$m'(x) = (x) * \left(\frac{1}{2}(x-3)^{-\frac{1}{2}}\right) + (x-3)^{\frac{1}{2}} * (1)$ Remplazando en la fórmula

$m'(x) = \frac{x}{2} * (x-3)^{-\frac{1}{2}} + (x-3)^{\frac{1}{2}}$ Simplificar la expresión

$m'(x) = (x-3)^{-\frac{1}{2}}\ (\frac{x}{2} + (x-3))$ Factorizar $(x-3)$ por facto común

$m'(x) = (x-3)^{-\frac{1}{2}}\ (\frac{x}{2} + x - 3)$ Simplificar, romper paréntesis

$m'(x) = (x-3)^{-\frac{1}{2}}\ (\frac{3}{2}x - 3)$ Operar términos semejantes

$m'(x) = \frac{(\frac{3}{2}x-3)}{(x-3)^{\frac{1}{2}}}$ Pasar el término $(x-3)^{-\frac{1}{2}}$ al denominador cambia de signo el exponente por propiedad de potenciación

$m'(x) = \frac{(\frac{3}{2}x-3)}{\sqrt{x-3}}$ Convertir el término del denominador en radical. Respuesta

Ejemplo 2: derivar $t(x) = \frac{x^3}{2x-1}$ $\frac{f(x)}{g(x)}$

Como se puede observar es un **cociente de funciones**, para derivar se utiliza:

$h'(x) = \frac{g(x)*f'(x) - f(x)*g'(x)}{[g(x)]^2}$

Identificación de los términos en la función $t(x) = \frac{x^3}{2x-1}$ $\frac{f(x)}{g(x)}$

$$f(x) = x^3$$

$$g(x) = 2x - 1$$

Calculamos las derivadas

$$f'(x) = 3x^2$$

$$g'(x) = 2$$

Aplicando la regla de cociente para $t(x) = \frac{x^3}{2x-1}$

$t'(x) = \frac{g(x)*f'(x) - f(x)*g'(x)}{[g(x)]^2}$

$t'(x) = \frac{(2x-1)*(3x^2) - (x^3)*(2)}{(2x-1)^2}$ Remplazar en la fórmula

$t'(x) = \frac{6x^3 - 3x^2 - 2x^3}{(2x-1)^2}$ Realizar operaciones

$t'(x) = \frac{4x^3 - 3x^2}{(2x-1)^2}$ Reducción de términos semejantes, respuesta

Ejemplo 3: derivar $q(x) = e^{2x^2+4}Cos(7x^3)$

F(x) g(x

Como se puede observar es un **producto de funciones**, para derivar se utiliza:

$h'(x) = f(x) * g'(x) + g(x) * f'(x)$

Identificación de los términos en la función $q(x) = e^{2x^2+4}Cos(7x^3)$

$$f(x) = e^{2x^2+4}$$

$$g(x) = Cos(7x^3)$$

Calculamos las derivadas

$$f'(x) = e^{2x^2+4} * (4x)$$

$$f'(x) = 4xe^{2x^2+4}$$

$$g'(x) = -Sen(7x^3) * 21x^2$$

$$g'(x) = -21x^2 Sen(7x^3)$$

Aplicando la regla del producto para $q(x) = e^{2x^2+4}Cos(7x^3)$

$q'(x) = f(x) * g'(x) + g(x) * f'(x)$

Remplazando en la fórmula

$q'(x) = (e^{2x^2+4}) * \left(-21x^2 Sen(7x^3)\right) + (Cos(7x^3)) * (4xe^{2x^2+4})$

$q'(x) = -21x^2 Sen(7x^3)e^{2x^2+4} + 4xCos(7x^3)e^{2x^2+4}$ Organizar y simplificar

$q'(x) = xe^{2x^2+4}(-21xSen(7x^3) + 4Cos(7x^3))$ Factorizar por factor común

$q'(x) = xe^{2x^2+4}(-21xSen(7x^3) + 4Cos(7x^3))$ Respuesta.

Ejemplo 4: derivar $s(x) = \frac{Ln(3x^4-3x)}{x^3+2}$ $\frac{f(x)}{g(x)}$

Como se puede observar es un **cociente de funciones**, para derivar se utiliza:

$h'(x) = \frac{g(x)*f'(x)-f(x)*g'(x)}{[g(x)]^2}$

Identificación de los términos en la función $s(x) = \frac{Ln(3x^4)}{x^3+2}$ $\frac{f(x)}{g(x)}$

$$f(x) = Ln(3x^4)$$

$$g(x) = x^3 + 2$$

Calculamos las derivadas

$$f'(x) = \frac{1}{(3x^4)} * (12x^3)$$

$$f'(x) = \frac{12x^3}{3x^4} = \frac{4}{x}$$

$$g'(x) = 3x^2$$

Aplicando la regla de cociente para $s(x) = \frac{Ln(3x^4)}{x^3+2}$

$s'(x) = \frac{g(x)*f'(x)-f(x)*g'(x)}{[g(x)]^2}$

$s'(x) = \frac{(x^3+2)*\left(\frac{4}{x}\right)-Ln(3x^4)*(3x^2)}{(x^3+2)^2}$ Remplazando en la fórmula

$s'(x) = \frac{(4x^2+\frac{8}{x})-3x^2Ln(3x^4)}{(x^3+2)^2}$ Realizar operaciones y organizar

$s'(x) = \frac{(4x^2+8x^{-1})-3x^2Ln(3x^4)}{(x^3+2)^2}$

$s'(x) = \frac{x^{-1}(4x^3+8-3x^3Ln(3x^4))}{(x^3+2)^2}$ Factorizar por factor común, respuesta

Tabla de Derivadas

Función	**Derivada**	**Ejemplos**	
Constante			
$y=c$	$y'=0$	$y=8$	$y'=0$
Identidad			
$y=x$	$y'=1$	$y=x$	$y'=1$
Funciones Potenciales			
$y = u^m$	$y' = mu^{m-1}u'$	$y = (2x^2+1)^3$	$y' = 3(2x^2+1)^2 \cdot 4x$
$y = \frac{1}{u^m}$	$y' = -\frac{mu'}{u^{m+1}}$	$y = \frac{1}{(2x+1)^3}$	$y' = -\frac{6}{(2x+1)^4}$
$y = \sqrt{u}$	$y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$y = \sqrt{5x}$	$y' = \frac{5}{2\sqrt{5x}}$
$y = \sqrt[m]{u}$	$y' = \frac{u'}{m\sqrt[m]{u^{m-1}}}$	$y = \sqrt[5]{3x^2}$	$y' = \frac{6x}{5\sqrt[5]{(3x^2)^4}}$
Funciones Exponenciales			
$y = e^u$	$y' = u'e^u$	$y = e^{3x^2+1}$	$y' = 6xe^{3x^2+1}$
$y = a^u$	$y' = u'a^u La$	$y = 5^{3x-4}$	$y' = 3 \cdot 5^{3x-4} L5$
Funciones Logarítmicas			
$y = Lu$	$y' = \frac{u'}{u}$	$y = L(x^2+7x)$	$y' = \frac{2x+7}{x^2+7x}$
$y = \log_a u$	$y' = \frac{u'}{u}\log_a e$	$y = \log_2(5x+7)$	$y' = \frac{5}{5x+7}\log_2 e$

Funciones Trigonométricas			
$y = \operatorname{sen} u$	$y' = u' \cos u$	$y = \operatorname{sen} 5x$	$y' = 5\cos 5x$
$y = \cos u$	$y' = -u' \operatorname{sen} u$	$y = \cos 3x^2$	$y' = -6x \operatorname{sen} x^2$
$y = \operatorname{tg} u$	$y' = u' \sec^2 u$	$y = \operatorname{tg} 7x$	$y' = 7\sec^2 7x$
$y = \cot g u$	$y' = u' \operatorname{cos}ec^2 u$	$y = \cot g(4x+5)$	$y' = -4\operatorname{cos}ec^2(4x+5)$
$y = \sec u$	$y' = u' \sec u \cdot \operatorname{tg} u$	$y = \sec x^3$	$y' = 3x^2 \sec x^3 \operatorname{tg} x^3$
$y = \operatorname{cos}ec u$	$y' = -u' \operatorname{cos}ec u \cot g u$	$y = \operatorname{cos}ec x^2$	$y' = -2x \operatorname{cos}ec x^2 \cot g x^2$
$y = \operatorname{arcsen} u$	$y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$y = \operatorname{arcsen} x^2$	$y' = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$
$y = \arccos u$	$y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$y = \arccos 3x$	$y' = \frac{-3}{\sqrt{1-9x^2}}$
$y = \operatorname{arctg} u$	$y' = \frac{u'}{1+u^2}$	$y = \operatorname{arctg} 3x$	$y' = \frac{3}{1+9x^2}$
Derivadas de sumas, restas, productos y cocientes de funciones			
$y = ku$	$y' = ku'$	$y = 3x^5$	$y' = 3 \cdot 5x^4 = 15x^4$
$y = u + v - w$	$y' = u' + v' - w'$	$y = 3x^2 - 2x + 5$	$y' = 6x - 2$
$y = uv$	$y' = u'v + uv'$	$y = x^2 \cos x$	$y' = 2x\cos x + x^2(-\operatorname{sen} x)$
$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	$y = \frac{2x^2}{x^3 - 1}$	$y' = \frac{4x(x^3-1) - 2x^2(3x^2)}{(x^3-1)^2}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Aplicando los teoremas adecuados realizar las siguientes derivadas:

1. $f(x) = -128$
2. $y = 3\pi$
3. $f(t) = t^4 + 3t^2 + 6$
4. $g(n) = 6n^3 - n^2$
5. $h(m) = 3m^{-4} + 3m^4$
6. $y = (2x^4 - 1)(5x^3 + 6x)$
7. $k(x) = (7 - 3x^3)^2$
8. $g(x) = 4x^2 - \frac{1}{4x^4}$
9. $y = \frac{x^3-8}{x^3+8}$
10. $g(t) = \frac{(2t^2+1)^2}{(3t^3+1)^3}$
11. $m(x) = \left(\frac{x^2+3}{5x-8}\right)^2$
12. $\sqrt[3]{4x^2 - 1}$
13. $y = \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}$
14. $f(x) = (x - \sqrt{1 - x^2}\,)^2$
15. $h(x) = (2x - 13)(x^2 + 3x - 2)$
16. $y = \ln(4x - 5)$
17. $f(x) = (x^2 + x - 1)^3$
18. $y = xlnx - x$
19. $f(t) = e^{5t}$
20. $f(m) = m^2e^m$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Aplicando los teoremas adecuados realizar las siguientes derivadas:

1. f (x) = $\dfrac{\cos(x^3) + \operatorname{sen} x}{x^2}$

2. Dada f (x) = $\dfrac{2x^2 - 1}{x\sqrt{1 + x^2}}$ comprobar que la derivada es: $\dfrac{4x^2 + 1}{x^2\sqrt{(1 + x^2)^3}}$

3. Derivar implícitamente la función f(x) = $y\sqrt{2 + 3x} + x\sqrt{1 + y}$

   encontrando x'

4. Comprobar que el resultado de la derivada de y = $x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 .sen^{-1}\dfrac{x}{a}$

   es $2\sqrt{a^2 - x^2}$

5. Calcular y' si se tiene que y está definido en forma implícita por la ecuación:

   ln ($x + y$) = $x^2 + y^2$

6. Utilizando la derivación logarítmica para la función $f(x) = \dfrac{\sqrt[4]{x^2 + 1}(2x + 3)(x^3 + 2)}{(3x + 1)(x - 4)}$

7. Calcular la derivada de $f(x) = \ln \dfrac{\sqrt{2x + 1}\sqrt[3]{3x + 2}}{(x^2 + 1)^5}$

8. Determine la ecuación de la recta tangente a la curva definida por *f(x)=ln(2x-1)* en el punto (1,0).