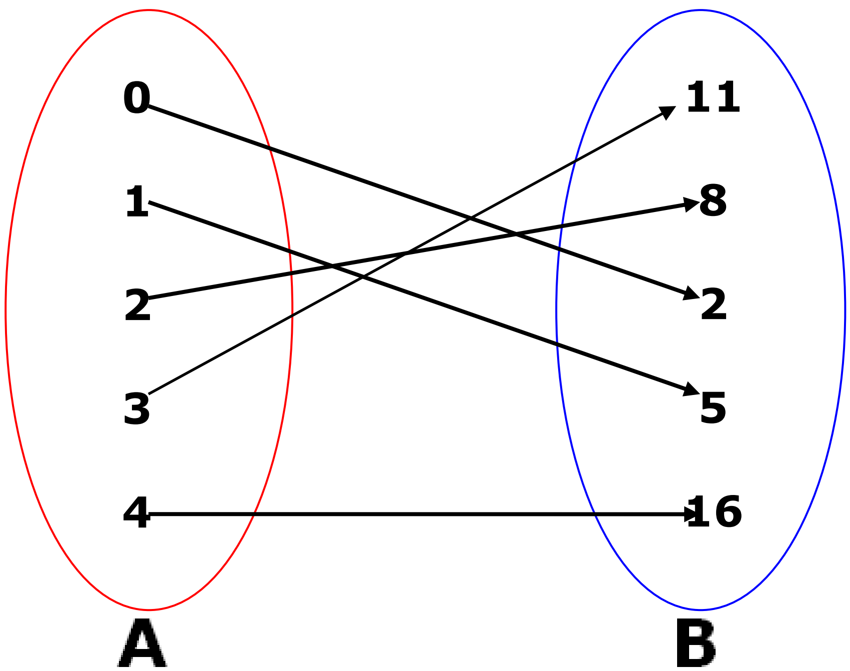
FUNCIONES

Una función es una regla que asocia a cada elemento de un conjunto, uno y solo un elemento de otro conjunto. Una función es un conjunto de parejas ordenadas de números (x, y) en el cual dos parejas ordenadas distintas no tienen el mismo primer elemento.
Una función establece una relación entre dos conjuntos; un conjunto de elementos a los que se le aplica la función (Dominio). Y un conjunto de resultados de aplicar la función (Rango).

Valores de la Función: Los valores de la función son los valores de sus imágenes, y el conjunto de imágenes o valores de **y** forman el **rango o codominio** de la función.

Ejemplo:

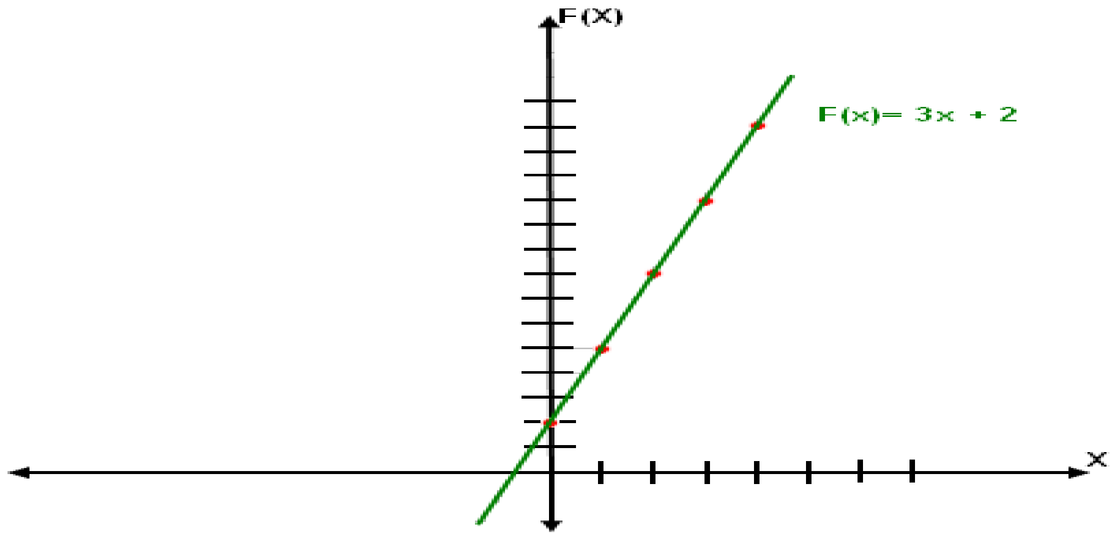
$F(x) = 3x + 2$



Una función es una regla de correspondencia entre dos conjuntos.
En este caso la regla de correspondencia es **F(X) = 3x + 2** y se le aplica a los elementos del conjunto **A** (Dominio) y obtenemos los elementos del conjunto **B** (Rango).

X	**F(X)**	
0	2	=3(0) + 2
1	5	=3(1) + 2
2	8	=3(2) + 2
3	11	=3(3) + 2
4	14	=3(4) + 2

Si graficamos ubicando los puntos como parejas ordenadas (X, F(x)) obtendremos la imagen de esta función.



Forma Explícita E Implícita De Una Función

Si **y** es una función de **x** definida por **y** = $3x^2 + 5x + 1$
y esta definida explícitamente en términos de **x**

y = F(x) **donde** **F(x) =** $3x^2 + 5x + 1$

Sin embargo, no todas las funciones están definidas explícitamente.

Así la ecuación $x^6 - 2x = 3y^6 + y^5 - y^2$ no la podemos resolver explícitamente para **y** como función de **x.** En este caso establecemos que "**y**" está definida implícitamente como función de **x**, o que la función F está definida implícitamente por la ecuación dada.

Forma Implícita	**Forma Explicita**
$y - 3x + 5 = 0$	$y = 3x - 5$
$xy = 1$	$y = 1/x \quad x \neq 0$
$y^2 - 2xy + 4x = 0$	$y = \dfrac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 16x}}{2}$

DOMINIO Y RANGO

Si F es una función de variable real, tal que **y** = **F(x)**, al conjunto de todos los valores posibles de la variable dependiente **x** se le llama **dominio** de la función, y al conjunto de todos los valores posibles de la variable dependiente **y** se le llama el **rango** de una función.

Dom (F) = $\{x \in \mathrm{IR} \,/\, (x, y) \in F\}$
Rang (F) = $\{y \in \mathrm{IR} \,/\, y = F(x)\}$

CLASIFICACIÓN DE LAS FUNCIONES.

1. Función Sobreyectiva: Una función f es sobreyectiva si cada elemento de B es imagen por lo menos de un elemento de A.

2. Función Inyectiva: Una función f es inyectiva o uno a uno, si cada elemento del rango es imagen a lo más de un elemento de A.

3. Función Biyectiva: Si una función f es Sobreyectiva e inyectiva decimos que la función es biyectiva.

4. Función Par: Una función f es par si f(x) = f(-x), para todo x del dominio.

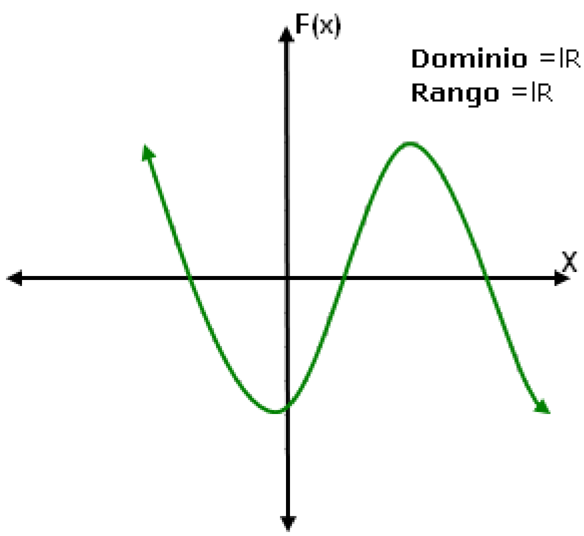
5. Función Impar: Una función f es impar si -f(x) = f(-x), para todo x del dominio.

Las funciones reales de variable real se clasifican en:
Funciones polinómicas, funciones racionales, funciones radicales, funciones trascendentes y funciones especiales.

Función Polinómica: $\mathbf{F(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots. a_1x + a_0}$

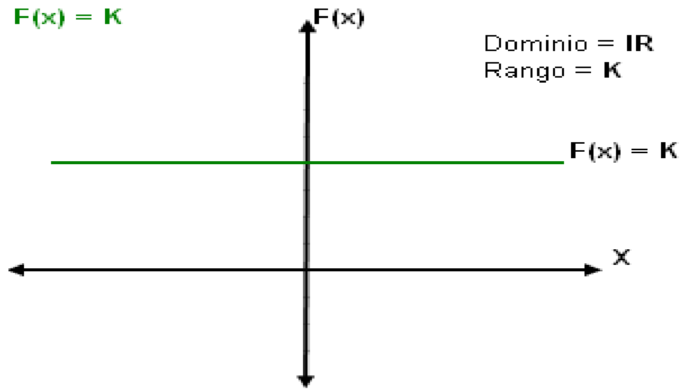
Cuando la función es polinómica su dominio son los números reales, y su rango el conjunto de imágenes subconjunto o conjunto de los reales. En general, se dice que una función polinómica es una **función de valores reales,** sin embargo estrictamente hablando, decimos que una función polinómica es aquella en la cual la variable independiente x tiene como mayor exponente 3 o más. Si tomamos a n como el exponente podríamos decir que n≥3**.**

La gráfica de un polinomio es una curva suave y continua.

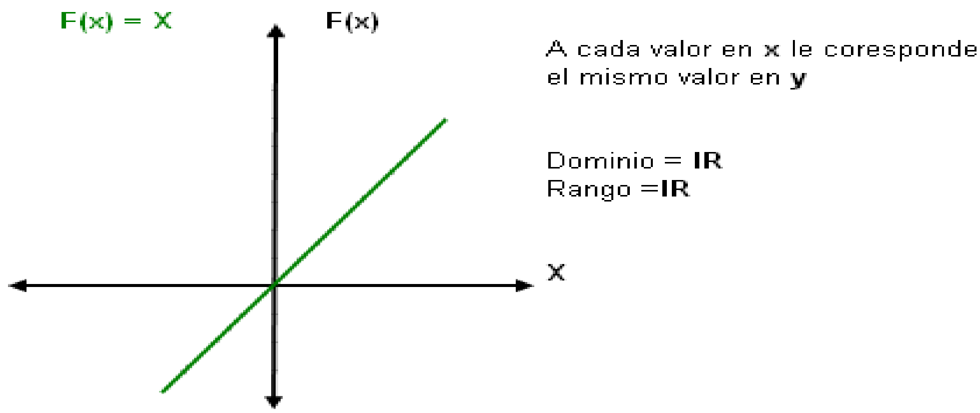


Las funciones, constante, idéntica, lineal y cuadrática son casos particulares de la función polinómica.

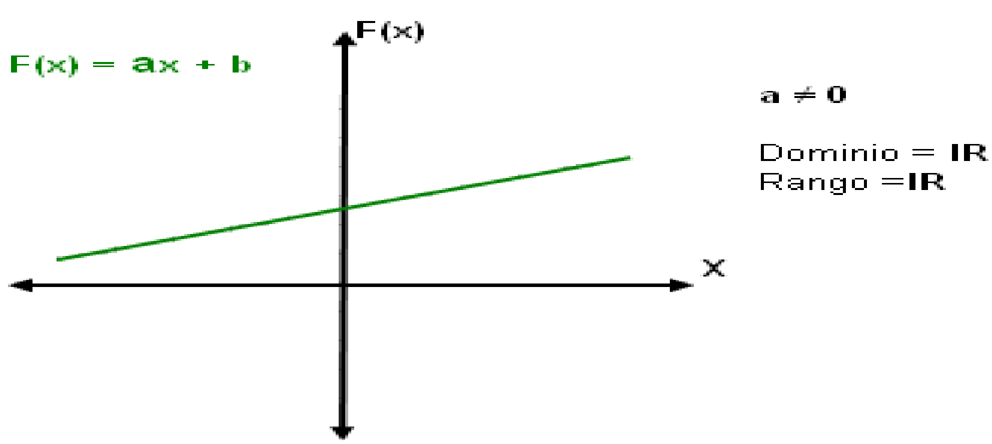
Función Constante



Función Lineal Identidad



Función Lineal

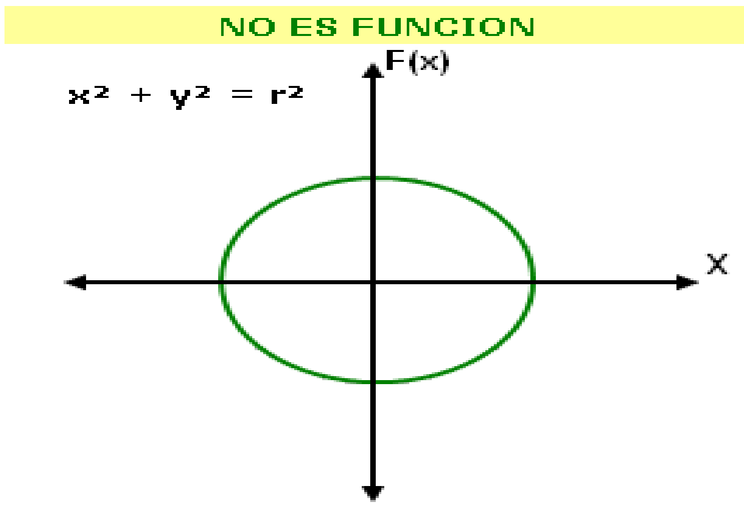


Función cuadrática

$$F(x) = a\,x^2 + bx + c \qquad\qquad a \neq 0$$

Dentro de las cuadráticas conocemos:

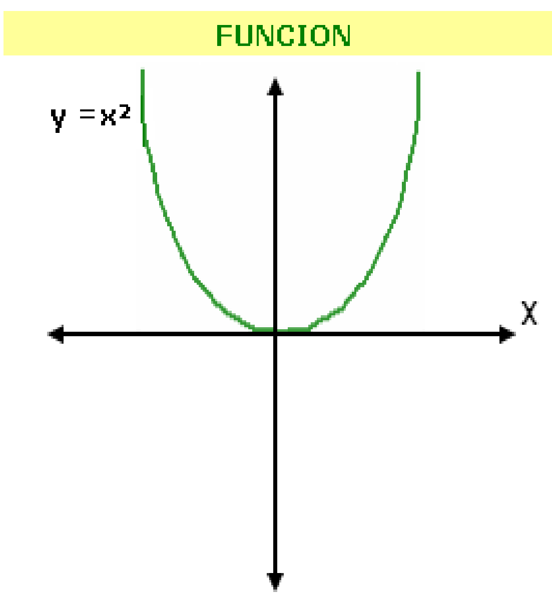
Circunferencias

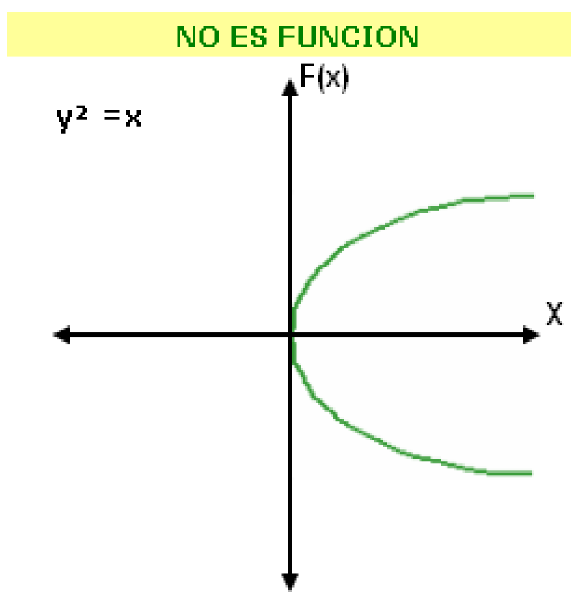


Parábolas

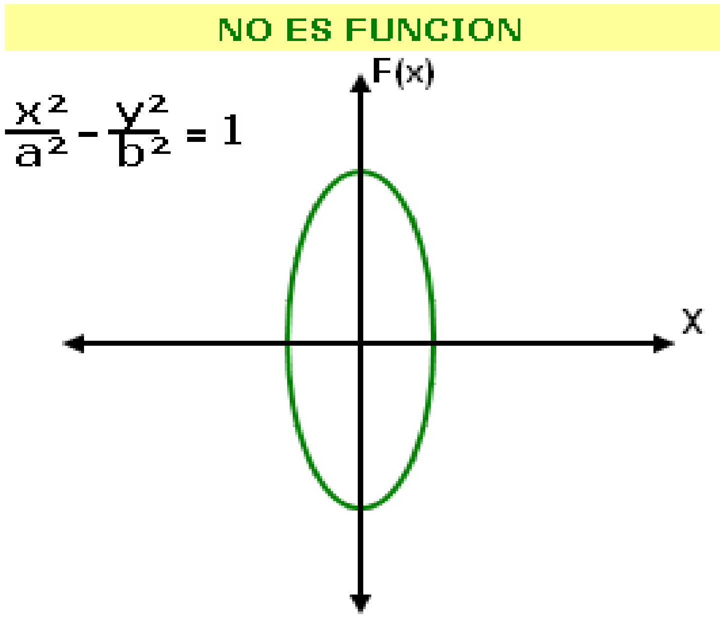
De las cuadráticas la única que es función es la parábola **$y = x^2$**

Dominio =IR **Rango =**IR

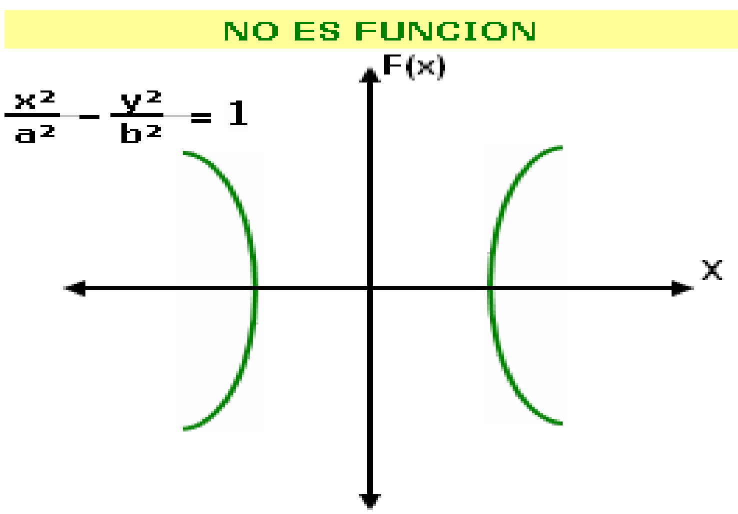




Elipses



Hipérbolas



Funciones Racionales

Son de la forma

$$F(X) = \frac{H(x)}{G(x)}$$

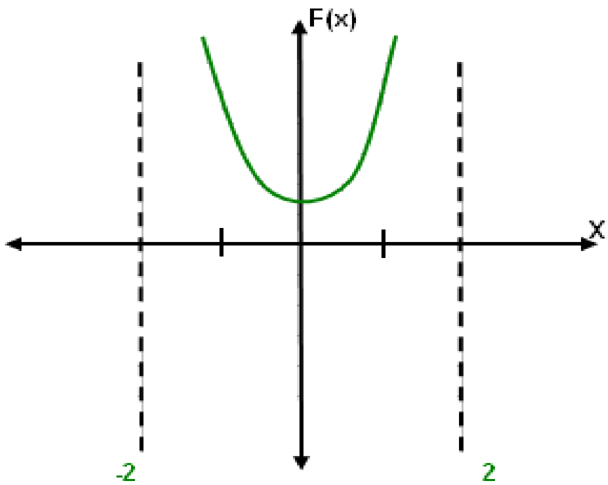
Donde H(x), G(x) son polinomios y G(x) ≠ 0

Dominio = **IR – {X ∈ IR / Q (x)** ≠ ± 0**}**

Ejemplo:

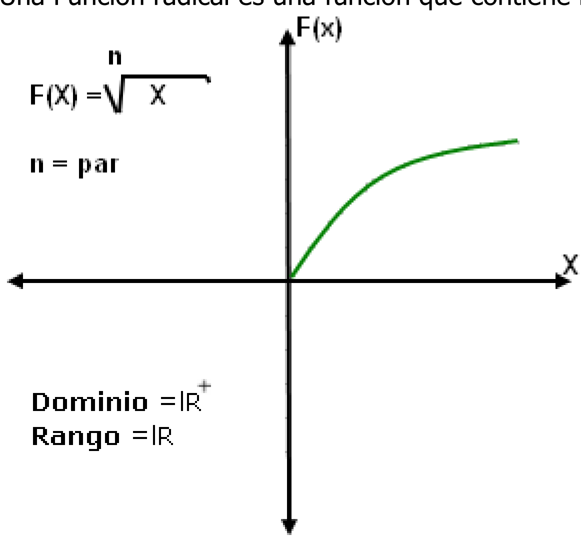
$$F(X) = \frac{2x^2 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$$

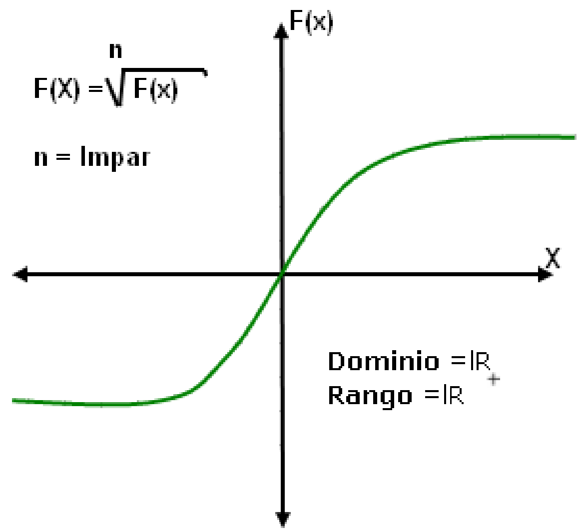
Dominio = IR – {X ∈ IR / X ≠ ± 2}
Rango = IR



Función Radical

Una Función radical es una función que contiene raíces de variables.

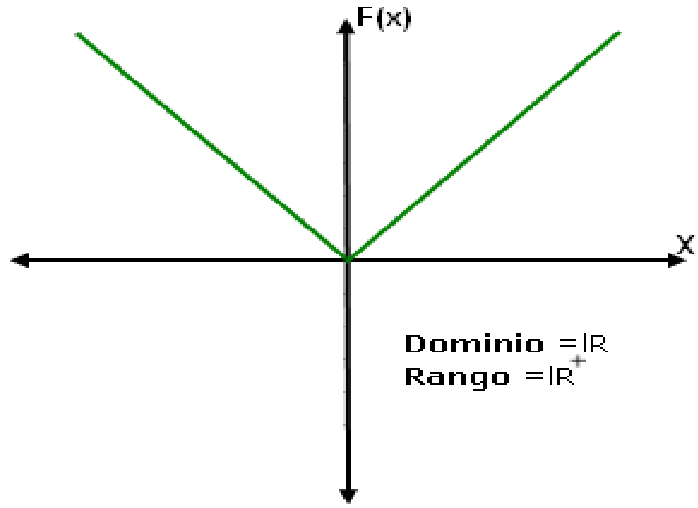




Función Valor Absoluto

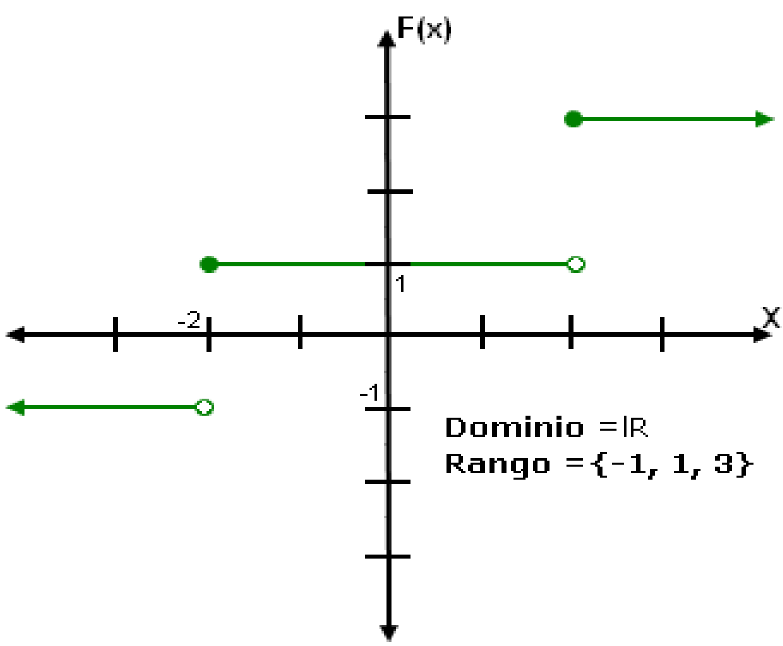
Es aquella función con dominio IR y cuya regla de correspondencia es:

$$F(x) = |x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$



Función Segmentada

Son funciones que presentan un comportamiento distinto dependiendo de los valores del dominio.



$$F(x) = \begin{cases} -1 & x < -2 \\ 1 & -2 \leq x < 2 \\ 3 & x \geq 2 \end{cases}$$

Funciones Trascendentes

Son aquellas funciones que no se pueden expresar como el resultado de operaciones algebraicas. Dentro de las funciones trascendentes tenemos:

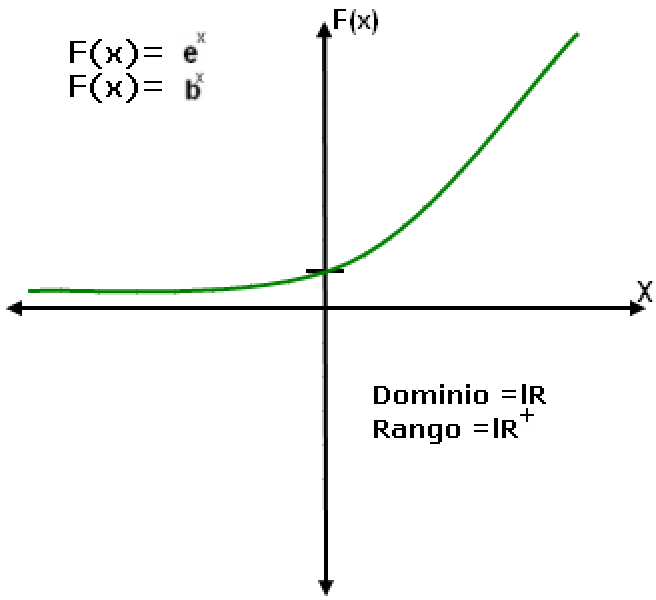
a. Funciones Exponenciales
b. Funciones Logarítmicas
c. Funciones Trigonométricas

a. Funciones Exponenciales

F(x) = x^b **b>0** **b**≠1

*Natural b=e F(x)= e^x

*Común b $\in$ IR F(x)= b^x



b. Funciones Logarítmicas

$F(x) = \mathrm{Log}_b\, x$ b>0 b≠1

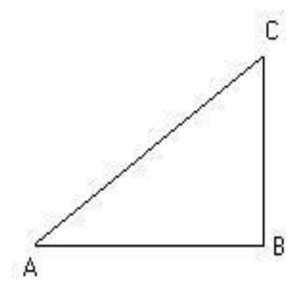
y = $F(x) = \mathrm{Log}_a\, x$ Si y solo si x = a^y

c. Funciones Trigonométricas
Son de la forma:

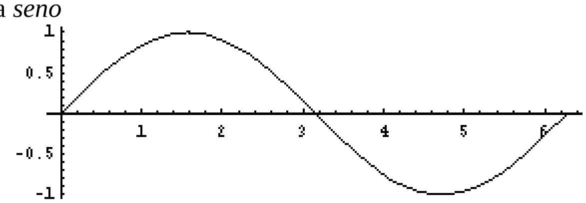
F(x) = Sen. X Dominio = IR Rango = [-1, 1]
F(x) = Cos. X Dominio = IR Rango = [-1, 1]
F(x) = Tan. X
F(x) = Cot. X
F(x) = Sec. X
F(x) = Csc. X

Funciones trigonométricas

Si construimos diferentes triángulos rectángulos cuyos ángulos sean iguales pero con lados de tamaños diferentes y calculamos las relaciones entre sus lados, veremos que las relacione son independiente del tamaño del triángulo.

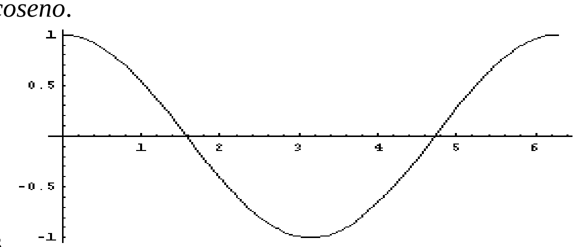


A la relación BC/AC se le llama *seno*



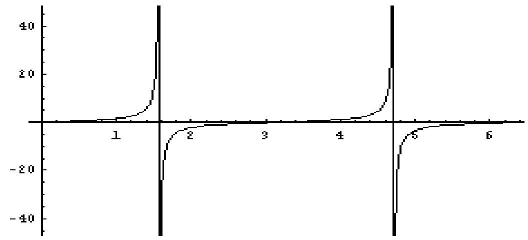
La gráfica de la función seno es

A la relación AB/AC se le llama *coseno*.

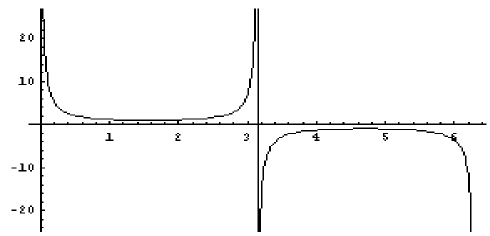


La gráfica de la función coseno es

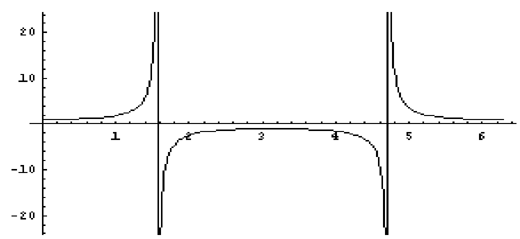
A la relación BC/AB se le llama *tangente*.

La gráfica de la función tangente es 

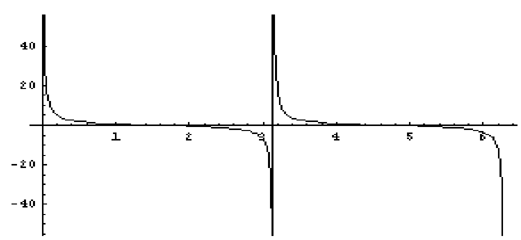
A la relación AC/BC se le llama *cosecante* (es la reciproca del seno).

La gráfica de la función cosecante es 

A la relación AC/AB se le llama *secante* (es la reciproca del coseno).

La gráfica de la función secante es 

A la relación AB/BC se le llama *cotangente* (es la reciproca de la tangente).

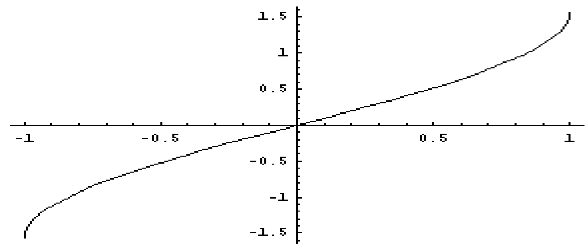
La gráfica de la función cotangente es 

La propiedad más importante de estas funciones es la *periodicidad* (sus valores se repiten cada cierto intervalo). Como en la Naturaleza hay muchos fenómenos periódicos (el movimiento de los planetas, el movimiento circular, las vibraciones, etc.) estas funciones aparecen muy frecuentemente.

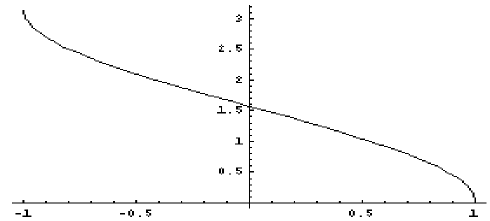
Funciones inversas de las funciones trigonométricas

La funciones inversas de las funciones trigonométricas son: arco seno, arco coseno, arco tangente, arco cosecante, arco secante y arco cotangente.

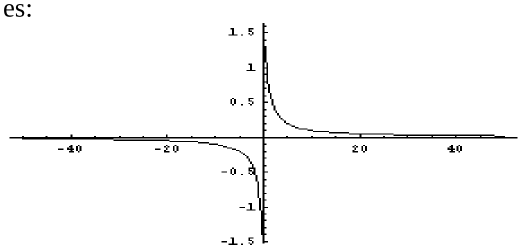
La gráfica de la función arcoseno es:



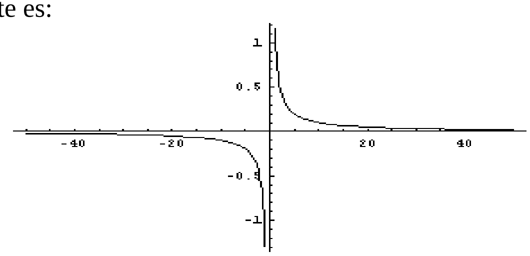
La gráfica de la función arcocoseno es:



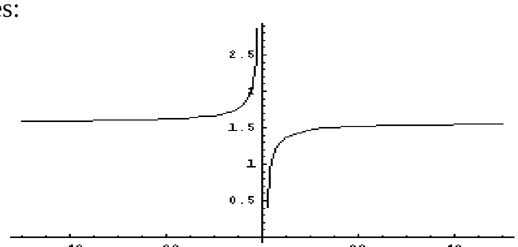
La gráfica de la función arcotangente es:



La gráfica de la función arcocosecante es:



La gráfica de la función arcosecante es:



La gráfica de la función arcocotangente es: